УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. И. Н. УЛЬЯНОВА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

Том XVIII ВЫПУСК 5

УЛЬЯНОВСК
1964

УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. И. Н. УЛЬЯНОВА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

Том XVIII ВЫПУСК 5

УЛЬЯНОВСК
1964

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОМПЛЕКСОВ

Расслояемые пары конгруэнций были определены Фубини следующим образом [1]. Для пары конгруэнций с взаимно однозначным соответствием лучей строятся два трехпараметрических многообразия плоских элементов. Эти две конгруэнции называются расслояемой парой, если два трехпараметрических многообразия плоских элементов можно расслоить в два однопараметрических семейства по ∞^2 элементов так, что центры элементов каждого семейства образуют ∞^1 поверхностей, а плоскости элементов являются касательными плоскостями к поверхностям в своих центрах. Расслояемая пара конгруэнций всегда является парой Т Финикова [1]. Общие касательные к расслоящим поверхностям двух однопараметрических семейств образуют ∞^2 конгруэнций W.

Это определение расслоения было перенесено Коровиным В. И. [2] на два трехпараметрических многообразия двумерных плоскостей $\{P\}$ и $\{P'\}$ с взаимно однозначным соответствием между плоскостями различных семейств в пятимерном проективном пространстве P_5. Плоский элемент определяется центром M, лежащим в плоскости P одного семейства, и трехмерным подпространством, проходящим через центр и соответствующую плоскость P′ второго семейства. Центр плоского элемента при движении плоскости по всему многообразию описывает трехмерное многообразие, касательное подпространство которого той же размерности, что и плоский элемент. Для расслоения этих двух многообразий трехмерных плоских элементов требуется существование двух двупараметрических семейств трехмерных поверхностей $\{\Sigma\}$ и $\{\Sigma'\}$, которые в каждой точке касаются плоского элемента в его центре. При этом асимптотические линии трехмерных поверхностей Σ и Σ', описываемых точками M и M′ плоскостей P и P′, соответствуют.

В дальнейшем это определение было обобщено Гейдельманом Р. М. [3] на случай двух k — параметрических семейств

(k-1)—мерных плоскостей. При этом было доказано, что расслояемая пара многообразий помещается в пространстве размерности 2k-1.

В задаче расслоения пары линейчатых поверхностей в P_3, поставленной Фиников ым С. П. [4], центр плоского элемента при движении луча по линейчатой поверхности описывает линию. Размерность касательного подпространства (касательная прямая) меньше размерности плоского элемента, поэтому касательное подпространство приходится заменить соприкасающимся. Пара линейчатых поверхностей с взаимно однозначным соответствием прямолинейных образующих расслояется, если на каждой поверхности можно провести однопараметрическое семейство кривых, соприкасающиеся плоскости которых в точках пересечения с прямолинейной образующей одной поверхности проходят через соответствующую образующую другой поверхности.

При расслоении двух однопараметрических семейств плоскостей в P_3 [5] плоские элементы не могут быть построены обычным способом. Поэтому между каждой парой соответствующих плоскостей устанавливается корреляция, и плоские элементы определяются точкой (центром) в плоскости одного семейства и плоскостью, проходящей через центр и соответствующую в корреляции прямую соответствующей плоскости другого семейства. Корреляция выбирается так, чтобы два однопараметрических семейства расслояющих поверхностей служили фокальными поверхностями ∞^2 конгруэнций W.

Расслояемая пара «конгруэнций» (двупараметрическое семейство) плоскостей в P_3 была определена Лактановой Н. В. [6]. Две «конгруэнции» плоскостей k и k′ она называет расслояемыми, если между плоскостями можно установить такое взаимно однозначное соответствие, для которого существует трехпараметрическое многообразие конгруэнций W с двумя двупараметрическими семействами расслояющих поверхностей, обладающих свойствами: 1) фокусы каждого луча любой из конгруэнций W лежат в соответствующих плоскостях «конгруэнций» k и k′; 2) каждому фокусу в одной плоскости «конгруэнции» k соответствует однопараметрическое семейство конгруэнций W, вторые фокусы которых лежат на одной прямой в соответствующей плоскости «конгруэнции» k^1. Соответствие фокуса одной плоскости прямой фокусов другой плоскости назовем фундаментальной корреляцией Ф. Тогда каждому центру плоского элемента в плоскости «конгруэнции» k можно поставить в соответствие плоскость элемента, проходящую через центр и соответствующую в корреляции Ф прямую соответствующей плоскости k′. Легко заметить, что два двупараметрических семейства фокальных поверхностей конгруэнций W расслояют пару четырехпараметрических многообразий плоских элементов.

В данной работе ставится задача: ввести понятие расслояемой пары комплексов прямых в трехмерном проективном пространстве.

Определение расслояемой пары комплексов

Для двух комплексов с взаимно однозначным соответствием лучей построим два четырехпараметрических многообразия плоских элементов, помещая центр каждого элемента на луче одного комплекса, а плоскость проводя через центр и соответствующий луч второго комплекса. Так как получаем двумерные плоские элементы, то пара комплексов должна расслаиваться двумерными поверхностями. Однако расслоение двух четырехпараметрических многообразий плоских элементов двумя двупараметрическими семействами поверхностей, возможное для произвольной пары комплексов, не приводит к системе конгруэнций W, фокальными поверхностями которых служат расслояющие поверхности первого и второго комплексов [7]. Действительно, каждая расслояющая поверхность выделяет из комплекса некоторую конгруэнцию, и для каждой пары расслояющих поверхностей первого и второго комплексов эти конгруэнции различны. Следовательно, взаимно однозначное соответствие лучей комплексов не установит точечного соответствия между расслояющими поверхностями. Поэтому при определении расслояемой пары комплексов налагаем дополнительные требования.

Первое требование заключается в том, чтобы между расслояющими поверхностями семейств $\{S\}$ и $\{S'\}$ существовало такое взаимно однозначное соответствие, что поверхности S, выделяющей на одном комплексе конгруэнцию k, соответствовала поверхность S' второго семейства, высекающая на втором комплексе конгруэнцию k', соответствующую конгруэнции k. Тогда касательная плоскость к поверхности S в точке M пересечения ее с произвольным лучом конгруэнции k пройдет через соответствующий луч конгруэнции k', а касательная плоскость к поверхности S' в точке M' пересечения ее с этим лучом конгруэнции k' пройдет через соответствующий луч конгруэнции k. Таким образом, взаимно однозначное соответствие, существующее между лучами комплексов, установит взаимно однозначное соответствие между касательными плоскостями поверхностей S и S', или, что то же самое, между точками пересечения соответствующих поверхностей с соответствующими лучами комплексов. Так как касательная плоскость к расслояющей поверхности совпадает с плоскостью элемента с центром в точке касания, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между плоскими элементами двух семейств по ∞^2 элементов, огибающими

поверхности S и S′. Пара соответствующих плоских элементов с центрами в точках M и M′ пересекается по прямой MM′, касающейся поверхностей S и S′ в этих точках. Совокупность общих касательных к паре соответствующих поверхностей образует конгруэнцию, фокальными поверхностями которой являются эти поверхности.

Второе требование состоит в том, чтобы эта конгруэнция была конгруэнцией W, то есть взимно однозначное соответствие точек поверхностей S и S′ должно переводить асимптотическую линию одной поверхности в асимптотическую линию другой. Для всего многообразия расслояющих поверхностей будем иметь ∞^2 конгруэнций W.

Сформулируем определение:

пара комплексов, между лучами которых установлено взаимно однозначное соответствие, называется расслояемой парой, если расслаиваются два многообразия по ∞^4 плоских элементов на два двупараметрических многообразия семейств по ∞^2 элементов в семействе так, что:

1) геометрическое место центров каждого семейства является двумерной поверхностью, огибаемой плоскостями семейства;

2) между поверхностями центров двух двупараметрических многообразий существует взаимно однозначное соответствие такое, что соответствующие поверхности выделяют на комплексах одну и ту же пару конгруэнций; при этом устанавливается взаимно однозначное соответствие между плоскими элементами соответствующих поверхностей;

3) ∞^4 пар соответствующих плоских элементов пересекаются по ∞^4 прямых, образующих ∞^2 конгруэнций W, где каждая конгруэнция имеет фокальными поверхностями пару соответствующих поверхностей центров.

Расслояемые пары конгруэнций всегда являются парами T. Понятие соответствия T для конгруэнций естественно распространяется и на пары комплексов, поэтому целесообразно искать расслояемые пары комплексов среди пар T. Это значительно облегчает выкладки.

Если даны два комплекса, находящиеся в соответствии T, то к каждой паре соответствующих лучей, как известно, можно присоединить тетраэдр так, что соответствующие комплексы, описываемые лучами M_1M_2 и M_3M_4 будут определяться уравнениями [8]:

$$\omega_2^3 = \omega_1^4, \tag{1}$$

$$\omega_3^2 = \omega_4^1. \tag{2}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений дает систему ковариантов:

$$[\varkappa\omega_1^4] - [\varphi\omega_1^3] + [\psi\omega_2^4] = 0, \tag{3}$$

$$[\varkappa\omega_4{}^1] + [\varphi\omega_4{}^2] - [\psi\omega_3{}^1], \tag{4}$$

где $\varkappa = \omega_1{}^1 - \omega_2{}^2 + \omega_3{}^3 - \omega_4{}^4$, $\varphi = \omega_2{}^1 + \omega_3{}^4$, $\psi = \omega_4{}^3 + \omega_1{}^2$.

Пара T комплексов, определяемая системой уравнений (1), (2), (3), (4), существует с произволом двух функций трех аргументов [8]. Расслояющие поверхности определяются уравнениями:

$$d\rho - \rho(\omega_1{}^1 - \omega_2{}^2) - \rho^2\omega_2{}^1 + \omega_1{}^2 = 0, \tag{5}$$

$$d\rho' - \rho'(\omega_3{}^3 - \omega_4{}^4) - \rho'^2\omega_4{}^3 + \omega_3{}^4 = 0 \tag{6}$$

и уравнениями конгруэнций, выделяемых этими поверхностями на комплексах [7]. По определению расслояемой пары комплексов эти конгруэнции совпадают и поэтому запишутся одним уравнением

$$\omega_1{}^4 - x\omega_1{}^3 - y\omega_2{}^4 = 0. \tag{7}$$

Так как существует взаимно однозначное соответствие между точками $M = M_1 + \rho M_2$ и $M' = M_3 + \rho' M_4$ пересечения соответствующих поверхностей S и S′ с соответствующими лучами комплексов, а каждый луч комплекса пересекают ∞^1 расслояющих поверхностей одного семейства, и найдутся ∞^1 поверхностей второго семейства, пересекающих соответствующий луч второго комплекса в соответствующих точках, то, следовательно, устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками всех пар соответствующих лучей расслояемых комплексов. Это соответствие будет выражаться формулой на ρ и ρ' с коэффициентами, зависящими от координат луча u, v, w, в которой каждому значению ρ (или ρ') соответствует единственное значение ρ' (или ρ). Тогда два двупараметрических семейства расслояющих поверхностей будут определяться системой уравнений, состоящей из конечного соотношения на ρ и ρ', уравнения (5) и уравнения (6), которое по исключении ρ и $d\rho'$ из первых двух уравнений будет определять конгруэнцию, выделяемую расслояющей поверхностью из комплекса; уравнение (7), определяющее ту же конгруэнцию, должно быть эквивалентно уравнению, полученному из (6). Система уравнений (5) и (6) должна быть вполне интегрируемой, то есть внешние дифференциалы этих уравнений должны удовлетворяться вследствие самих уравнений (5) и (6).

Вывод формулы соответствия точек соответствующих лучей комплексов

Внешние дифференциалы уравнений (5) и (6) после исключения $d\rho$ и $d\rho'$ и использования соотношений (1) и (2) имеют вид:

$$\rho^2\{[\omega_3{}^1\omega_1{}^4] + [\omega_4{}^1\omega_2{}^4]\} + \rho\{[\omega_3{}^1\omega_1{}^3] - [\omega_4{}^2\omega_2{}^4]\} - [\omega_4{}^2\omega_1{}^4] - [\omega_4{}^1\omega_1{}^3] = 0, \tag{5′}$$

$$\rho'^2\{[\omega_4{}^2\omega_1{}^4]+[\omega_4{}^1\omega_1{}^3]\}+\rho'\{[\omega_3{}^1\omega_1{}^3]-[\omega_1{}^2\omega_2{}^4]\}-[\omega_3{}^1\omega_1{}^4]-$$
$$-[\omega_4{}^1\omega_2{}^4]=0. \qquad (6')$$

Главные формы $\omega_3{}^1$, $\omega_4{}^1$, $\omega_4{}^2$ комплекса {34} запишем в виде линейных комбинаций независимых главных форм $\omega_1{}^3$, $\omega_1{}^4$, $\omega_2{}^4$ комплекса {12} [9]:

$$\left.\begin{aligned}\omega_3{}^1&=\alpha_1\omega_1{}^3+\alpha_2\omega_1{}^4+\alpha_3\omega_2{}^4,\\ \omega_4{}^1&=\beta_1'\omega_1{}^3+\beta_2'\omega_1{}^4+\beta_3'\omega_2{}^4,\\ \omega_4{}^2&=\beta_1\omega_1{}^3+\beta_2\omega_1{}^4+\beta_3\omega_2{}^4.\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Внесем в ковариантны (5′) и (6′) разложения (8) и соотношение (7). Принимая за линейно независимые формы на расслояющих поверхностях формы $\omega_1{}^3$ и $\omega_2{}^4$ и приравнивая нулю коэффициенты при внешнем произведении этих форм, получим два конечных соотношения:

$$\left.\begin{aligned}&\rho^2(x\tilde{\alpha}_2-y\tilde{\alpha}_1-\tilde{\beta}_1')+\rho(\tilde{\alpha}_2+\tilde{\beta}_1)-x\tilde{\beta}_2+y\tilde{\beta}_1-\tilde{\beta}_2'=0,\\ &\rho'^2(x\tilde{\beta}_2-y\tilde{\beta}_1+\tilde{\beta}_2')+\rho'(\tilde{\alpha}_2+\tilde{\beta}_1)-x\tilde{\alpha}_2+y\tilde{\alpha}_1+\tilde{\beta}_1'=0,\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\alpha}_1=\alpha_1+x\alpha_2, \quad \tilde{\beta}_1=\beta_1+x\beta_2, \quad \tilde{\beta}_1'=\beta_1'+x\beta_2',\\ &\tilde{\alpha}_2=\alpha_3+y\alpha_2. \quad \tilde{\beta}_2=\beta_3+y\beta_2, \quad \tilde{\beta}_2'=\beta_3'+y\beta_2'.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

По определению, соответствующие поверхности S и S' должны быть фокальными поверхностями конгруэнции W, следовательно, асимптотические линии этих поверхностей должны соответствовать. Асимптотическая линия характеризуется тем свойством, что соприкасающаяся плоскость в каждой ее точке совпадает с касательной плоскостью к поверхности в этой точке. Так как соприкасающаяся плоскость к асимптотической линии поверхности S в точке $M=M_1+\rho M_2$ определяется точками M, dM, d^2M, то она совпадает с касательной плоскостью, если точка d^2M лежит в плоскости MM_3M_4, то есть равно нулю грассманово произведение

$$(d^2MMM_3M_4)=0. \qquad (11)$$

В выражении d^2M нас интересуют только слагаемые, содержащие M_1 и M_2, поэтому запишем:

$$d^2M=\{\omega_1{}^3\omega_3{}^1+\omega_1{}^4\omega_4{}^1+\rho(\omega_1{}^4\omega_3{}^1+\omega_2{}^4\omega_4{}^1)\}M_1+$$
$$+\{\omega_1{}^3\omega_4{}^1+\omega_1{}^4\omega_4{}^2+\rho(\omega_1{}^4\omega_4{}^1+\omega_2{}^4\omega_4{}^2)\}M_2+AM_3+BM_4,$$

где коэффициенты A и B нас не интересуют. Подставляя выражение d^2M в (11) и пользуясь уравнениями пары T комплексов (1) и (2), получаем

$$\rho^2(\omega_3{}^1\omega_1{}^4+\omega_4{}^1\omega_2{}^4)+\rho(\omega_3{}^1\omega_1{}^3-\omega_1{}^2\omega_2{}^4)-\omega_4{}^1\omega_1{}^3-\omega_4{}^2\omega_1{}^4=0. \qquad (12)$$

Воспользовавшись разложениями (8) и уравнением конгруэнции (7), получим уравнение асимптотических линий на поверхности S

$$(\omega_1{}^3)^2\{\rho(\rho x+1)\tilde{\alpha}_1 - x\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1'\} +$$
$$+\omega_1{}^3\omega_2{}^4\{\rho^2(y\tilde{\alpha}_1+\tilde{\beta}_1') - (\rho+y)\tilde{\beta}_1 + \rho(\rho x+1)\tilde{\alpha}_2 - x\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_2'\} + \qquad (13)$$
$$+(\omega_2{}^4)^2\{\rho^2(y\tilde{\alpha}_2+\tilde{\beta}_2') - (\rho+y)\tilde{\beta}_2\} = 0.$$

Уравнение асимптотических линий поверхности S' получим, заменяя ρ, 1, 2 в уравнении (12) соответственно на ρ', 3,4:

$$\rho'^2(\omega_4{}^2\omega_1{}^4+\omega_4{}^1\omega_1{}^3)+\rho'(\omega_3{}^1\omega_1{}^3-\omega_4{}^2\omega_2{}^4)-\omega_4{}^1\omega_2{}^4-\omega_3{}^1\omega_1{}^4=0. \qquad (14)$$

Подставляя в уравнение (14) разложения (8) и соотношение (7), получаем уравнение асимптотических линий в виде

$$(\omega_1{}^3)^2\{(\rho'-x)\tilde{\alpha}_1+\rho'^2(x\tilde{\beta}_1+\tilde{\beta}_1')\}+$$
$$+\omega_1{}^3\omega_2{}^4\{\rho'(\rho' y-1)\tilde{\beta}_1 - y\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1' + \rho'^2(x\tilde{\beta}_2+\tilde{\beta}_2') + \qquad (15)$$
$$+(\rho'-x)\tilde{\alpha}_2\} + (\omega_2{}^4)^2\{\rho'(\rho' y-1)\tilde{\beta}_2 - y\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_2'\} = 0.$$

Асимптотические линии на поверхностях S и S' соответствуют, если в уравнениях (13) и (15) пропорциональны коэффициенты при одинаковых степенях $\omega^3{}_1$, $\omega^4{}_2$.

Условия пропорциональности при помощи уравнений (9) преобразуются к виду:

$$\left.\begin{aligned}(\rho\rho'+1)(y\tilde{\alpha}_1+x\tilde{\beta}_1+\tilde{\beta}_1')\{\rho\tilde{\alpha}_1-\rho'\tilde{\beta}_1+(\rho\rho'-1)\tilde{\beta}_1\}=0,\\(\rho\rho'+1)(y\tilde{\alpha}_2+x\tilde{\beta}_2+\tilde{\beta}_2')\{\rho\tilde{\alpha}_2-\rho'\tilde{\beta}_2+(\rho\rho'-1)\tilde{\beta}_2'\}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Уравнения (16) удовлетворяются в следующих случаях:

1. $y\tilde{\alpha}_1+x\tilde{\beta}_1+\tilde{\beta}_1'=0,$ $\quad y\tilde{\alpha}_2+x\tilde{\beta}_2+\tilde{\beta}_2'=0.$

2. $\rho\tilde{\alpha}_1-\rho'\tilde{\beta}_1+(\rho\rho'-1)\tilde{\beta}_1'=0,$ $\quad \rho\tilde{\alpha}_2-\rho'\tilde{\beta}_2+(\rho\rho'-1)\tilde{\beta}_2'=0.$

3. $y\tilde{\alpha}_1+x\tilde{\beta}_1+\tilde{\beta}_1'=0,$ $\quad \rho\tilde{\alpha}_2-\rho'\tilde{\beta}_2+(\rho\rho'-1)\tilde{\beta}_2'=0.$

4. $\rho\tilde{\alpha}_1-\rho'\tilde{\beta}_1+(\rho\rho'-1)\tilde{\beta}_1'=0,$ $\quad y\tilde{\alpha}_2+x\tilde{\beta}_2+\tilde{\beta}_2'=0.$

5. $\rho\rho'+1=0.$ $\qquad (17)$

В случае 1 с помощью соотношений (10) найдем функции x и y, не зависящие от ρ. При этом конгруэнция (7) не будет зависеть от ρ, а так как уравнение конгруэнции должно быть

вполне интегрируемым на расслояемой паре комплексов, то в этом случае пара комплексов разлагается на ∞^1 расслояемых пар конгруэнций.

Рассматривая второй, третий и четвертый случаи вместе с уравнениями (9), также получаем, что пара комплексов разлагается на расслояемые пары конгруэнций. Такие случаи, когда пара комплексов распадается на расслояемые пары конгруэнций, в дальнейшем будем исключать, как тривиальные.

В случае 5 соответствие точек на соответствующих расслояющих поверхностях S и S' комплексов определяется формулой (17).

Так как в формулу (17) не входят коэффициенты, зависящие от u, v, w, то, следовательно, устанавливается одно и то же соответствие между точками всех пар соответствующих лучей комплексов.

Уравнения, определяющие расслояемую пару комплексов

Подставляя выражение ρ' из уравнения (17) в (6) и исключая $d\rho$ при помощи соотношения (5), получаем систему, определяющую расслояющие поверхности, следующего вида:

$$d\rho - \rho(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \rho_2\omega_2^1 + \omega_1^2 = 0, \tag{5}$$

$$\rho^2\varphi + \rho\varkappa - \psi = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) определяет конгруэнцию, которую выделяет расслояющая поверхность из комплекса.

Система (5), (6) определяет двупараметрическое семейство расслояющих поверхностей, если внешние дифференциалы ее являются алгебраическими следствиями уравнений системы.

Дифференцируя внешним образом уравнения (5) и (6) и заменяя $d\rho$ его выражением из (5), получаем только одно квадратичное уравнение

$$\rho^2\{[\omega_3^1\omega_1^4] + [\omega_4^1\omega_2^4]\} + \rho\{[\omega_3^1\omega_1^3] - [\omega_4^2\omega_2^4]\} - [\omega_4^1\omega_1^3] - [\omega_4^2\omega_1^4] = 0. \tag{5'}$$

Уравнение (5') должно удовлетворяться вследствие соотношения (6), то есть должно равняться нулю внешнее произведение

$$[\rho^2\{[\omega_3^1\omega_1^4] + [\omega_4^1\omega_2^4]\} + \rho\{[\omega_3^1\omega_1^3] - [\omega_4^2\omega_2^4]\} - [\omega_4^1\omega_1^3] - [\omega_4^2\omega_1^4];$$

$$\rho^2\varphi + \rho\varkappa - \psi] = 0. \tag{18}$$

Так как уравнение (18) должно удовлетворяться при любых значениях u, v, ω, ρ, в частности, при любых значениях ρ, то должны равняться нулю коэффициенты при степенях ρ

$$[\varphi;[\omega_3{}^1\omega_1{}^4] + [\omega_4{}^1\omega_2{}^4]\,] = 0; \quad [\varkappa;[\omega_3{}^1\omega_1{}^4] + [\omega_4{}^1\omega_2{}^4]\,] +$$
$$+ [\psi;[\omega_3{}^1\omega_1{}^3] - [\omega_4{}^2\omega_2{}^4]] = 0;$$
$$[\psi;[\omega_3{}^1\omega_1{}^4] + [\omega_4{}^1\omega_2{}^4]] - [\varkappa;[\omega_3{}^1\omega_1{}^3] - [\omega_4{}^2\omega_2{}^4]] +$$
$$+ [\varphi;[\omega_4{}^2\omega_1{}^4] + [\omega_4{}^1\omega_1{}^3]] = 0;$$
$$[\varkappa;[\omega_4{}^2\omega_1{}^4] + [\omega_4{}^1\omega_1{}^3]] + [\psi;[\omega_3{}^1\omega_1{}^3] - [\omega_4{}^2\omega_2{}^4]] = 0;$$
$$[\psi;[\omega_4{}^2\omega_1{}^4] + [\omega_4{}^1\omega_1{}^3]] = 0.$$

Таким образом, расслояемая пара T комплексов определяется системой уравнений:

$$\omega_2{}^3 = \omega_1{}^4; \quad (1) \quad \omega_3{}^2 = \omega_4{}^1; \tag{2}$$
$$[\varkappa\omega_1{}^4] - [\varphi\omega_1{}^3] + [\psi\omega_2{}^4] = 0; \tag{3}$$
$$[\varkappa\omega_4{}^1] + [\varphi\omega_4{}^2] - [\psi\omega_3{}^1] = 0; \tag{4}$$
$$\left.\begin{array}{c} [\varphi;[\omega_3{}^1\omega_1{}^4] + [\omega_4{}^1\omega_2{}^4]] = 0; \quad [\varphi;[\omega_3{}^1\omega_1{}^3] - [\omega_4{}^2\omega_2{}^4]] = 0; \\ 2[\varphi;[\omega_4{}^2\omega_1{}^4] + [\omega_4{}^1\omega_1{}^3]] - [\varkappa;[\omega_3{}^1\omega_1{}^3] - [\omega_4{}^2\omega_2{}^4]] = 0; \\ [\psi;[\omega_3{}^1\omega_1{}^3] - [\omega_4{}^2\omega_2{}^4]] = 0; \quad [\psi;[\omega_4{}^2\omega_1{}^4] + [\omega_4{}^1\omega_1{}^3]] = 0. \end{array}\right\} \tag{19}$$

Эта система не в инволюции, и ее надо продолжать.

Для простоты выкладок проведем канонизацию гетраэдра, выбирая точки на лучах расслояемых комплексов так, чтобы комплексы, описываемые лучами M_1M_3 и M_2M_4, тоже были в соответствии T.

В этом репере комплексы определяются следующей системой:

$$\omega_2{}^3 = \omega_1{}^4; \quad (1) \quad \omega_3{}^2 = \omega_4{}^1; \quad (2) \quad \omega_4{}^1 = -\omega_1{}^4; \tag{20}$$
$$[\varkappa\omega_1{}^4] - [\varphi\omega_1{}^3] + [\psi\omega_2{}^4] = 0; \tag{3}$$
$$[\varkappa\omega_1{}^4] - [\varphi\omega_4{}^2] + [\psi\omega_3{}^1] = 0; \tag{21}$$
$$2[\varkappa_1\omega_1{}^4] - [\varphi_1;\omega_4{}^2 - \omega_1{}^3] + [\psi_1;\omega_3{}^1 - \omega_2{}^4] = 0; \tag{22}$$

где

$$\varkappa_1 = \omega_1{}^1 + \omega_2{}^2 - \omega_3{}^3 - \omega_4{}^4, \qquad \varphi_1 = \omega_2{}^1 - \omega_3{}^4, \qquad \psi_1 = \omega_4{}^3 - \omega_1{}^2 \quad [8]$$

Расслояемая пара T комплексов в новом репере будет определяться уравнениями: (1), (2), (20), (3), (21), (22) и (19). Продолжаем эту систему.

Разрешая уравнение (3) по лемме Картана, получим:

$$\left.\begin{array}{c} -\varphi = a_{11}\omega_1{}^3 + a_{12}\omega_1{}^4 + a_{13}\omega_2{}^4; \quad \varkappa = a_{21}\omega_1{}^3 + a_{22}\omega_1{}^4 + a_{23}\omega_2{}^4; \\ \psi = a_{31}\omega_1{}^3 + a_{32}\omega_1{}^4 + a_{33}\omega_2{}^4; \quad a_{i\varkappa} = a_{\varkappa i}. \end{array}\right\} \tag{23}$$

Внесем произвольно написанные разложения (8) форм $\omega_3{}^1$, $\omega_4{}^2$ и выражения (23) в уравнение (21). Приравнивая нулю коэффициенты при внешних произведениях независимых форм $\omega_1{}^3$, $\omega_1{}^4$, $\omega_2{}^4$, получим

$$\left.\begin{aligned} a_{12}(\beta_1 - 1) - a_{11}\beta_2 - a_{13}\alpha_2 + a_{23}\alpha_1 = 0;\\ a_{23}(\alpha_3 - 1) - a_{33}\alpha_2 - a_{13}\beta_2 + a_{12}\beta_3 = 0;\\ a_{13}(\alpha_3 - \beta_1) + a_{11}\beta_3 - a_{33}\alpha_1 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Подставляя выражения (8), (20) и (23) в уравнения (19), получаем:

$$\left.\begin{aligned} a_{13}\alpha_1 - a_{11}(\alpha_3 + 1) = 0: \quad a_{11}\beta_2 + a_{13}\alpha_2 - a_{12}(\alpha_3 + \beta_1) = 0;\\ 2\{a_{11}\beta_3 - a_{13}(\beta_1 + 1)\} + a_{12}\beta_2 - a_{22}(\alpha_3 + \beta_1) + a_{23}\alpha_2 = 0;\\ a_{13}\beta_2 + a_{33}\alpha_2 - a_{23}(\alpha_3 + \beta_1) = 0; \quad a_{13}\beta_3 - a_{33}(\beta_1 + 1) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Соотношения (24), (25) эквивалентны следующей системе восьми конечных уравнений на шесть неизвестных функций α и β (будем выражать α, β через a_{ik}):

$$\left.\begin{aligned} a_{23}\alpha_1 - a_{12}(\alpha_3 + 1) = 0: \quad (26) \qquad a_{12}\beta_3 - a_{23}(\beta_1 + 1) = 0; \quad (28)\\ a_{13}\alpha_1 - a_{11}(\alpha_3 + 1) = 0; \quad (27) \qquad a_{13}\beta_3 - a_{33}(\beta_1 + 1) = 0; \quad (29)\\ a_{11}\beta_2 + a_{13}\alpha_2 - a_{12}(\alpha_3 + \beta_1) = 0; \quad (30)\\ a_{13}\beta_2 + a_{33}\alpha_2 - a_{23}(\alpha_3 + \beta_1) = 0; \quad (31)\\ 2\{a_{33}\alpha_1 - a_{13}(\alpha_3 + 1)\} + a_{12}\beta_2 - a_{22}(\alpha_3 + \beta_1) + a_{23}\alpha_2 = 0; \quad (32)\\ 2\{a_{11}\beta_3 - a_{13}(\beta_1 + 1)\} + a_{12}\beta_2 - a_{22}(\alpha_3 + \beta_1) + a_{23}\alpha_2 = 0. \quad (33) \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Разрешаем уравнения (26), (27) относительно α_1 и α_3, а уравнения (28), и (29) относительно β_1, β_3. При этом возможны следующие случаи:

1. $a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12} \neq 0$, ($\alpha$) $\quad a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12} \neq 0$. ($\beta$)
2. $a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12} = 0$, ($\gamma$) $\quad a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12} = 0$. ($\delta$)
3. $a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12} = 0$ (γ) $\quad a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12} \neq 0$ (β)
4. $a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12} \neq 0$. ($\alpha$) $\quad a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12} = 0$. ($\delta$)

1. Из (26), (27), (28), (29) получаем

$$\alpha_1 = \beta_3 = 0, \qquad \alpha_3 = \beta_1 = -1. \quad (34)$$

Остальные соотношения (*) примут вид

$$a_{11}\beta_2 + a_{13}\alpha_2 + 2a_{12} = 0; \quad a_{12}\beta_2 + a_{23}\alpha_2 + 2a_{22} = 0.$$
$$a_{13}\beta_2 + a_{33}\alpha_2 + 2a_{23} = 0. \quad (35)$$

Уравнения (35) последовательно умножим на ω_1^3, ω_1^4,ω_2^4 и сложим. Получим одно уравнение Пфаффа

$$-\beta_2\varphi + \alpha_2\psi + 2\varkappa = 0.$$

Вносим значения (34) в разложения (8); оставшиеся неизвестными α_2, β_2 обозначаем через α, β. Расслояемая пара комплексов в этом случае определяется уравнениями Пфаффа:

$$\left.\begin{array}{c}\omega_2{}^3-\omega_1{}^1=0;\ (1)\quad \omega_3{}^2-\omega_4{}^1=0;\ (2)\quad \omega_4{}^1+\omega_1{}^4=0;\ (20)\\ \alpha\psi-\beta\varphi+2\varkappa=0;\ (36)\qquad \omega_3{}^1-\varkappa\omega_1{}^4+\omega_2{}^4=0;\ (37)\\ \omega_4{}^2-\beta\omega_1{}^4+\omega_1{}^3=0;\ (38)\end{array}\right\}\quad \text{I}$$

2. Соотношения (γ) и (δ) — линсйны и однородны относительно a_{12} и a_{23}. Возможны два случая:

a) $(a_{13})^2-a_{11}a_{33}=0,\ a_{12}\neq 0,\ a_{23}\neq 0$; b) $(a_{13})^2-a_{11}a_{33}\neq 0, a_{12}=a_{23}=0$

В случае (a) из уравнений (γ) и (δ) запишем, введя параметр t:

$$a_{11}=t(a_{12})^2;\quad a_{13}=ta_{12}a_{23};\quad a_{33}=t(a_{23})^2. \tag{39}$$

Подставляя (39) в (*), получим уравнения:

$$a_{23}\alpha_1-a_{12}(\alpha_3+1)=0;\ (26)\qquad a_{12}\beta_3-a_{23}(\beta_1+1)=0;\ (28)$$

$$a_{12}\beta_2+a_{23}\alpha_2-a_{22}(\alpha_3+\beta_1)=0;\ (\tilde{32})\qquad t(a_{12}\beta_2+a_{23}\alpha_2)-\alpha_3-\beta_1=0.\ (\tilde{30})$$

Из уравнений $(\tilde{30})$ и $(\tilde{32})$, однородных относительно неизвестных $a_{12}\beta_2+a_{23}\alpha_2$ и $\alpha_3+\beta_1$, следует: либо уравнения пропорциональны, то есть

$$ta_{22}-1=0, \tag{40}$$

либо $ta_{22}-1\neq 0$,

$$\alpha_3+\beta_1=0,\quad a_{12}\beta_2+a_{23}\alpha_2=0. \tag{41}$$

Если $ta_{22}-1=0$, то уравнение конгруэнции $(\tilde{6})$ не зависит от ρ, и расслояемая пара комплексов разлагается на ∞^1 расслояемых пар конгруэнций. В этом можно убедиться, подставив в $(\tilde{6})$ вместо форм φ, $\varkappa$, ψ их разложения (23) с коэффициентами из (39) и (40). Этот случай расслоения не рассматриваем. Следовательно, удовлетворяются соотношения (41). Допуская, что $a_{12}\neq 0$ и обозначая отношение a_{23} к a_{12} через s, запишем полученные соотношения для α и β:

$$\alpha_3=-\beta_1=s\alpha_1-1;\quad \beta_3=s(2-s\alpha_1);\quad \beta_2=-s\alpha_2. \tag{42}$$

Таким образом, пара T комплексов в случае расслоения 2(a) определяется уравнениями:

$$\left.\begin{array}{c}\omega_2{}^3-\omega_1{}^4=0;\ (1)\quad \omega_3{}^2-\omega_4{}^1=0;\ (2)\quad \omega_4{}^1+\omega_1{}^4=0;\qquad (20)\\ \varphi+a_{12}\{ta_{12}(\omega_1{}^3+s\omega_2{}^4)+\omega_1{}^4\}=0;\ (a)\\ \varkappa-a_{12}(\omega_1{}^3+s\omega_2{}^4)-a_{22}\omega_1{}^4=0;\ (b)\\ \psi+s\varphi=0;\ (c)\quad \omega_3{}^1+\omega_2{}^4-\alpha_1(\omega_1{}^3+s\omega_2{}^4)-\alpha_2\omega_1{}^4=0;\ (d)\\ \omega_4{}^2-\omega_1{}^3+s(\omega_3{}^1-\omega_2{}^4)=0.\qquad (e)\end{array}\right\}\quad \text{II}$$

Рассмотрим случай (b). Из уравнений (30), (31) системы (*) в силу неравенства

$$(a_{13})^2-a_{11}a_{33}\neq 0 \tag{43}$$

получаем $\alpha_2 = \beta_2 = 0$.

Оставшиеся уравнения можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a_{13}\alpha_1 - a_{11}\alpha_3 &= a_{11}; \quad (27)\\ -a_{33}\beta_1 + a_{13}\beta_3 &= a_{33}; \quad (29)\\ 2a_{33}\alpha_1 - (2a_{13}+a_{22})\alpha_3 - a_{22}\beta_1 &= 2a_{13} \quad (32)_b\\ -a_{22}\alpha_3 - (2a_{13}+a_{22})\beta_1 + 2a_{11}\beta_3 &= 2a_{13}. \quad (33)_b \end{aligned}\right\}$$

Эта система единственным образом определит α_1, α_3, β_1, β_3, если определитель системы $D = 4\{(a_{13})^2 - a_{11}a_{33}\}\{(a_{13})^2 - a_{11}a_{33} + a_{13}a_{22}\} \neq 0$. Вследствие (43) достаточно показать, что выражение

$$l = (a_{13})^2 - a_{11}a_{33} + a_{13}a_{22} \neq 0.$$

Допустим, что $l = 0$. Здесь $a_{13} \neq 0$, так как иначе и $a_{11}a_{33} = 0$, что противоречит неравенству (43). Из $l = 0$ найдем a_{22}. Вносим выражение a_{22} в $(33)_b$, исключаем β_3 при помощи (29) и, поделив на $(a_{13})^2 - a_{11}a_{33}$, получаем $\beta_1 = \alpha_3 - 2$. Подставляя в $(32)_b$ значение β_1 и исключая α_1 при помощи (27), получаем, принимая во внимание $l = 0$, $(a_{13})^2 - a_{11}a_{33} = 0$, что противоречит неравенству (43). Следовательно, $l \neq 0$, то есть $D \neq 0$: Найдем α_1, α_3, β_1, β_3 из (27), (29), $(32)_b$, $(33)_b$, и подставим их в разложения (8). Расслояемая пара T комплексов в случае $2(b)$ определяется следующей системой Пфаффа:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_2{}^3 - \omega_1{}^4 = 0; \quad (1) \quad \omega_3{}^2 - \omega_4{}^1 = 0; \ (2) \quad \omega_4{}^1 + \omega_1{}^4 = 0; \ (20)\\ &\varphi + a_{11}\omega_1{}^3 + a_{13}\omega_2{}^4 = 0; \ (a) \quad \varkappa - a_{22}\omega_1{}^4 = 0; \ (b)\\ &\psi - a_{13}\omega_1{}^3 - a_{33}\omega_2{}^4 = 0; \ (c) \quad l(\omega_3{}^1 + \omega_2{}^4) + a_{22}\varphi = 0; \ (d)\\ &l(\omega_4{}^2 + \omega_1{}^3) - a_{22}\psi = 0. \quad (e) \end{aligned}\right\} \text{ III}$$

3. После несложных преобразований конечных соотношений здесь получаем случай расслоения (1), к которому добавляется условие (γ). Введя параметр p, получаем из (γ)

$$a_{11} = pa_{12}; \qquad a_{13} = pa_{23}.$$

Из конечных соотношений получаем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_3 = 0; \quad \alpha_3 = \beta_1 = -1; \quad \beta_2 = -\frac{2}{p}; \quad a_{22} = \frac{a_{12}}{p}.$$

Расслояемая пара T комплексов определяется уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_2{}^3 - \omega_1{}^4 = 0; \ (1) \quad \omega_3{}^2 - \omega_4{}^1 = 0; \ (2) \quad \omega_4{}^1 + \omega_1{}^4 = 0; \ (20)\\ &\varphi + a_{12}(p\omega_1{}^3 + \omega_1{}^4) + pa_{23}\omega_2{}^4 = 0; \ (a) \quad p\varkappa + \varphi = 0; \ (b)\\ &\psi - a_{23}(p\omega_1{}^3 + \omega_1{}^4) - a_{33}\omega_2{}^4 = 0; \ (c) \quad \omega_3{}^1 + \omega_2{}^4 = 0; \ (d)\\ &p(\omega_4{}^2 + \omega_1{}^3) + 2\omega_1{}^4 = 0. \quad (e) \end{aligned}\right\} \text{ IV}$$

4. Из (δ) при помощи параметра q запишем

$$a_{13} = qa_{12}; \qquad a_{32} = qa_{23}.$$

Остальные конечные соотношения показывают, что этот случай получается из расслоения (1) добавлением соотношения (δ). Расслояемая пара комплексов определяется уравнениями:

$$\left.\begin{array}{r} \omega_2{}^3 - \omega_1{}^4 = 0;\ (1)\ \omega_3{}^2 - \omega_4{}^1 = 0\ (2)\ \omega_4{}^1 + \omega_1{}^4 = 0; \qquad (20) \\ \varphi + a_{11}\omega_1{}^3 + a_{12}(\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4) = 0;\ (a) \qquad q\varkappa - \psi = 0; \qquad (b) \\ \psi - qa_{12}\omega_1{}^3 - a_{23}(\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4) = 0;\ (c)\ q(\omega_3{}^1 + \omega_2{}^4) + 2\omega_1{}^4 = 0;\ (d) \\ \omega_4{}^2 + \omega_1{}^3 = 0. \qquad (e) \end{array}\right\} \text{V}$$

Докажем существование расслояемой пары комплексов в каждом из пяти полученных случаев расслоения.

Расслоение пар T комплексов I и II

Расслояемая пара комплексов в случае I существует, если система уравнений I определяет трехмерное интегральное многообразие, на котором $[\omega_1{}^3\omega_1{}^4\omega_2{}^4] \neq 0$. Дифференцируя уравнения I внешним образом, получаем только пять квадратичных уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} [\varphi; \beta\omega_1{}^4 - 2\omega_1{}^3] - [\psi; \alpha\omega_1{}^4 - 2\omega_2{}^4] = 0; \qquad (1') \\ [2\varkappa_1 - \beta\varphi_1 + \alpha\psi_1; \omega_1{}^4] + 2[\varphi_1\omega_1{}^3] - 2[\psi_1\omega_2{}^4] = 0; \qquad (20') \\ [\Delta\alpha - 2\alpha\varkappa_1; \psi] - [\Delta\beta - 2\beta\varkappa_1; \varphi] = 0; \qquad (36') \\ [\Delta\alpha\omega_1{}^4] - 4[\varkappa_1\omega_2{}^4] = 0;\ (37') \qquad [\Delta\beta\omega_1{}^4] - 4[\varkappa_1\omega_1{}^3] = 0,\ (38') \end{array}\right\} \text{I}'$$

где

$$\Delta\alpha = 4\{d\alpha + \alpha(\omega_1{}^1 - \omega_3{}^3) - 2\varphi_1\} - \alpha(\alpha\psi_1 - \beta\varphi_1);$$
$$\Delta\beta = 4\{d\beta + \beta(\omega_2{}^2 - \omega_4{}^4) + 2\psi_1\} - \beta(\alpha\psi_1 - \beta\varphi_1).$$

Система уравнений I, I′ — не в инволюции, и ее надо продолжать.

Разрешая уравнения (37′), (38′), получаем

$$\Delta\alpha = 4(k_1\omega_1{}^4 - k\omega_2{}^4); \qquad \varkappa_1 = k\omega_1{}^4; \qquad \Delta\beta = 4(k_2\omega_1{}^4 - k_2\omega_1{}^3).$$

Подставляя эти выражения в (36′) и исключая случай пропорциональности форм φ и ψ, при котором пара комплексов разлагается на ∞^1 расслояемых пар конгруэнций, получаем:

$$\Delta\alpha = 4k(\alpha\omega_1{}^4 - \omega_2{}^4); \quad \varkappa_1 = k\omega_1{}^4; \quad \Delta\beta = 4k(\beta\omega_1{}^4 - \omega_1{}^3). \qquad (a)$$

Продолжаем систему I, присоединяя к ней уравнения (а). Коварианты уравнений продолженной системы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} [\varphi; \beta\omega_1{}^4 - 2\omega_1{}^3] - [\psi; \alpha\omega_1{}^4 - 2\omega_2{}^4] &= 0; \\ [\varphi_1; \beta\omega_1{}^4 - 2\omega_1{}^3] - [\psi_1; \alpha\omega_1{}^4 - 2\omega_2{}^4] &= 0; \\ [\Delta k\omega_1{}^4] = 0; \quad [\Delta k\omega_1{}^3] &= 0; \quad [\Delta k\omega_2{}^4] = 0, \end{aligned}\right\} \quad I_a'$$

где

$$\Delta k = 2\{dk + k(\omega_1{}^1 - \omega_4{}^4)\} + k(\alpha\omega_1{}^2 - \beta\omega_3{}^4) - 4(\alpha\omega_1{}^3 + \beta\omega_2{}^4) + \\ + (4\alpha\beta - k^2)\omega_1{}^4.$$

Из уравнений I_a' следует

$$\Delta k = 0. \qquad (b)$$

Присоединяем уравнение (b) к системе I, (a). Внешний дифференциал уравнения (b) в силу уравнений I, (a), (b) и I_a обращается в тождество.

Итак, расслояемая пара T комплексов определяется системой Пфаффа: I, (a), (b).

Система ковариантов содержит только два квадратичных уравнения

$$\left.\begin{aligned} [\varphi; \beta\omega_1{}^4 - 2\omega_1{}^3] - [\psi; \alpha\omega_1{}^4 - 2\omega_2{}^4] &= 0; \\ [\varphi_1; \beta\omega_1{}^4 - 2\omega_1{}^3] - [\psi_1; \alpha\omega_1{}^4 - 2\omega_2{}^4] &= 0. \end{aligned}\right\} \quad I_b'$$

В характеристическую систему входят формы, стоящие в левых частях уравнений Пфаффа I, (*a*), (*b*), формы, независимые на интегральном многообразии, и еще четыре формы: φ; ψ; φ_1; ψ_1 следовательно, $q = 4$. Характеры системы следующие: $s_1 = 2$, $s_2 = 2$, $s_3 = 0$, число Картана $Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 6$, трехмерный интегральный элемент E_3 определяется с произволом $N = 6$ параметров. Следовательно, система — в инволюции, и расслояемая пара комплексов существует с произволом двух функций двух аргументов.

Так как алгебраическое дифференцирование ковариантов по формам φ; ψ; φ_1; ψ_1 приводит только к двум независимым комбинациям

$$\beta\omega_1{}^4 - 2\omega_1{}^3 = 0; \qquad \alpha\omega_1{}^4 - 2\omega_2{}^4 = 0, \qquad (44)$$

то расслояемая пара комплексов обладает характеристическими многообразиями, которые определяются характеристической системой уравнений. В этом случае каждый комплекс состоит из ∞^2 линейчатых поверхностей, определяемых на расслояемой паре комплексов уравнениями (44). Через каждый луч комплекса проходит одна линейчатая поверхность. Рассмотрим взаимосвязь между этими линейчатыми поверхностями и конгруэнциями комплекса $\tilde{(6)}$, выделяемыми расслояющими поверхностями. Уравнение этих конгруэнций получим из $\tilde{(6)}$; пользуясь соотношениями (23) и (36):

$$\{\rho(2\rho + \beta)a_{11} + (\rho\alpha + 2)a_{13}\}(\beta\omega_1{}^4 - 2\omega_1{}^3) + \{\rho(2\rho + \beta)a_{13} + \\ + (\rho\alpha + 2)a_{33}\}(\alpha\omega_1{}^4 - 2\omega_2{}^4) = 0. \qquad \tilde{(6)}_1$$

Через каждый луч комплекса проходят ∞^1 конгруэнций $(6)_I$, и все эти конгруэнции пересекаются по одной общей линейчатой поверхности, характеристике нашего многообразия, проходящей через этот луч. Действительно, уравнение $\widetilde{(6)}_I$ удовлетворяется тождественно соотношениями (44). Следовательно, все конгруэнции $\widetilde{(6)}_I$ состоят из этих линейчатых поверхностей.

Покажем, что линейчатые поверхности (44) образуют расслояемые пары, то есть несут по ∞^1 линий, соприкасающиеся плоскости которых в точках пересечения с некоторым лучом комплекса (образующей поверхности) проходят через соответствующий луч второго комплекса (соответствующую образующую другой поверхности).

Рассмотрим уравнение асимптотических линий на расслояющих поверхностях, которое получим из уравнения (12), подставляя соотношения (34), (35), $\widetilde{(6)}_I$.

$$(\alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4)\{[\rho(2\rho+\beta)a_{11} + (\rho\alpha+2)a_{13}]\omega_1^3 + [\rho(2\rho+\beta)a_{13} + (\rho\alpha+2)a_{33}]\omega_2^4\} = 0.$$

Одно семейство асимптотических линий, определяемых на поверхностях уравнением

$$\alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4 = 0, \tag{45}$$

соответствует на всех расслояющих поверхностях. Каждой кривой этого семейства в конгруэнции $\widetilde{(6)}_I$ соответствует линейчатая поверхность, которую образуют ∞^1 лучей конгруэнции вдоль этой кривой. Эта линейчатая поверхность определяется уравнениями (45) и $\widetilde{(6)}_I$ или:

$$\alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4 = 0, \qquad \alpha\omega_1^4 - 2\omega_2^4 = 0,$$

которые определяют ту же линейчатую поверхность, что и (44). Следовательно, характеристические линейчатые поверхности пересекают все расслояющие поверхности по соответствующим асимптотическим линиям. А так как вдоль одного луча имеется ∞^1 расслояющих поверхностей, то на каждой линейчатой поверхности будем иметь ∞^1 расслояющих кривых.

Итак, в этом случае расслояемая пара комплексов разбивается на ∞^2 расслояемых пар линейчатых поверхностей.

В случае II расслояемая пара комплексов определяется системой уравнений Пфаффа II. Ковариантны системы имеют вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
&[\varkappa_1\omega_1{}^4] - [\omega_1{}^2 + s\omega_3{}^4;\ \omega_3{}^1 - \omega_2{}^4] = 0; && (20')\\
&[\Delta t;\ \omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4] + [\Delta a_{12}\omega_1{}^4] + a_{12}[ta_{12}\Delta s + \omega_1{}^2 + s\omega_3{}^4;\ \omega_2{}^4] = 0; && (a')\\
&a_{12}[ta_{12}\Delta s + \omega_1{}^2 + s\omega_3{}^4;\ \omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4] + [a_{12}\Delta s + \\
&\quad + a_{22}(\omega_1{}^2 + s\omega_3{}^4);\ \omega_1{}^4] = 0; && (b')\\
&[\Delta a_{12};\ \omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4] + [\Delta a_{22}\omega_1{}^4] + [a_{12}\Delta s + \\
&\quad + a_{22}(\omega_1{}^2 + s\omega_3{}^4);\ \omega_2{}^4] = 0; && (c')\\
&[\Delta\alpha_1;\ \omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4] + [\Delta\alpha_2\omega_1{}^4] + [\alpha_1\Delta s + \\
&\quad + \alpha_2(\omega_1{}^2 + s\omega_3{}^4) - \varkappa_1;\ \omega_2{}^4] = 0; && (d')\\
&[\Delta s;\ \omega_3{}^1 - \omega_2{}^4] - [\varkappa;\ \omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4] = 0, && (e')
\end{aligned}
\right\} \text{II}'
$$

где

$$\Delta a_{12} = da_{12} + a_{12}(\omega_1{}^1 - \omega_3{}^3) - a_{22}\omega_3{}^4 + 2t(a_{12})^2(\omega_1{}^2 - s\omega_3{}^4);$$

$$\Delta a_{22} = da_{22} + a_{22}(\omega_1{}^1 - \omega_4{}^4) + a_{12}(3\omega_1{}^2 - \omega_4{}^3) + a_{12}s(\omega_2{}^1 - 3\omega_3{}^4),$$

$$\Delta s = ds - s(\omega_1{}^1 - \omega_2{}^2 - \omega_3{}^3 + \omega_4{}^4),$$

$$\Delta t = (a_{12})^2\{dt + t(\omega_3{}^3 - \omega_2{}^2) + (2t^2sa_{12} - 1)\omega_1{}^4 - 4t^2a_{12}(\omega_1{}^2 - s\omega_3{}^4)\} +$$
$$+ 2ta_{12}\Delta a_{12} - 2a_{12}(1 - ta_{22})\omega_3{}^4,$$

$$\Delta\varkappa_1 = d\alpha_1 + 2\alpha_1(\omega_1{}^1 - \omega_3{}^3) - \alpha_2\omega_3{}^4,$$

$$\Delta\varkappa_2 = d\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_1{}^1 - \omega_3{}^3 - \omega_4{}^4) - \alpha_1\psi_1 + (s\alpha_1 - 2)\varphi_1.$$

Система уравнений II, II′ — не в инволюции. Разрешая уравнения (20′), (e′) системы II′, получим:

$$\varkappa_1 = x_1\omega_1{}^4 + x_2(\omega_3{}^1 - \omega_2{}^4); \qquad \Delta s = x_4(\omega_3{}^1 - \omega_2{}^4) + x_5(\omega_3{}^1 + s\omega_2{}^4);$$
$$-\omega_1{}^2 - s\omega_3{}^4 = x_2\omega_1{}^4 + x_3(\omega_3{}^1 - \omega_2{}^4);$$
$$-\varkappa_1 = x_5(\omega_3{}^1 - \omega_2{}^4) + x_6(\omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4).$$

Сравнивая два выражения для $\varkappa_1$, имеем: $x_1 = 0$, $x_6 = 0$, $x_5 = -x_2$. Подставляя выражения форм Δs, $\omega_1{}^2 + s\omega_3{}^4$ в уравнение (b′) и приравнивая нулю коэффициенты при внешних произведениях независимых форм, получаем два однородных соотношения на параметры x_3 и x_4:

$$a_{22}x_3 - a_{12}x_4 = 0, \quad x_3 - ta_{12}x_4 = 0.$$

Так как $ta_{22} - 1 \neq 0$, то $x_3 = x_4 = 0$ и остается произвольным только параметр x_2. Обозначая x_2 через x, запишем выражения форм:

$$\varkappa_1 = x(\omega_3{}^1 - \omega_2{}^4); \quad \omega_1{}^2 + s\omega_3{}^4 = -x\omega_1{}^4; \quad \Delta s = -x(\omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4). \qquad (f)$$

Продолжаем систему уравнений II, II′, присоединяя уравнения f) и их внешние дифференциалы:

$$[\Delta x;\ \omega_3{}^1 - \omega_2{}^4] = 0; \quad [\Delta x\omega_1{}^4 = 0]; \quad [\Delta x;\ \omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4] = 0, \qquad (f')$$

где

$$\Delta x = dx + x(\omega_2{}^2 - \omega_4{}^4) + x^2\omega_2{}^4 + 2(s\omega_3{}^1 - \omega_1{}^3).$$

Из уравнений (f') следует

$$\Delta x = 0. \qquad (g)$$

Присоединяем (g) к системе II, (f). Внешний дифференциал уравнения (g) тождественно удовлетворяется в силу остальных уравнений.

Таким образом, расслояемая пара комплексов определяется системой Пфаффа, состоящей из уравнений II, (f); (g) и квадратичных уравнений, полученных из уравнений (a'), (c'), (d') подстановкой соотношений (f). Квадратичные уравнения запишутся так:

$$\left.\begin{aligned}
&[\Delta t + t(a_{12})^2 x\omega_2{}^4; \omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4] + [\Delta a_{12} + a_{12}x\omega_2{}^4; \omega_1{}^4] = 0;\\
&[\Delta a_{12} + a_{12}x\omega_2{}^4; \omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4] + [\Delta a_{22} + a_{22}x\omega_2{}^4; \omega_1{}^4] = 0;\\
&[\Delta\alpha_1 + 2\alpha_1 x\omega_2{}^4; \omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4] + [\Delta\alpha_2 + 2\alpha_2 x\omega_2{}^4; \omega_1{}^4] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \text{II}_g'$$

Характеристическая система, кроме форм, входящих в систему Пфаффа, и форм, независимых на искомом интегральном многообразии, содержит еще $q=5$ форм, входящих в квадратичные уравнения. Так как замкнутая система ковариантов содержит только три квадратичных уравнения, то характеры системы следующие: $s_1=3$, $s_2=2$, $s_3=q-s_1-s_2=0$. Произвол цепи интегральных элементов $Q=7$ равен произволу наиболее общего интегрального элемента $N=7$. Система в инволюции и определяет расслояемую пару T комплексов с произволом двух функций двух аргументов. Характеристическая система уравнений, как в случае I, оставляет произвольной одну из форм, независимых на расслояемой паре комплексов. Следовательно, и в этом случае расслояемая пара комплексов содержит характеристические многообразия. Характеристическими многообразиями являются ∞^2 пар линейчатых поверхностей, определяемых на комплексе интегрируемой системой:

$$\omega_1{}^4 = 0, \quad \omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4 = 0. \qquad (46)$$

Через каждый луч комплекса проходит одна линейчатая поверхность. Каждая пара соответствующих линейчатых поверхностей первого и второго комплексов образует расслояемую пару. Напишем уравнение асимптотических линий расслояющих поверхностей, подставляя в (13) соотношения (42):

$$(\omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4)\{(\alpha_1 + x\alpha_2)(\omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4) - 2\omega_2{}^4\} = 0.$$

Так как уравнение одного семейства асимптотических линий $\omega_1{}^3 + s\omega_2{}^4 = 0$ не зависит от ρ, то оно определяет семейство асимптотических, соответствующих на всех расслояющих поверхностях.

Уравнение конгруэнции, выделяемой расслояющей поверхностью, получим из уравнения (6), пользуясь соотношениями (23), (39):

$$\{\rho a_{22} - a_{12}(\rho^2 + s)\}\,\omega_1^4 + a_{12}\{\rho - t a_{12}(\rho^2 + s)\}(\omega_1^3 + s\omega_2^1) = 0. \quad (6)_{II}.$$

Следовательно, асимптотические линии, соответствующие на всех расслояющих поверхностях, на комплексе будут определяться уравнениями:

$$\omega_1^3 + s\omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^4 = 0.$$

А так как этими же соотношениями удовлетворяется и система (46), то, следовательно, характеристические многообразия пересекают расслояющие поверхности пары комплексов по семействам соответствующих асимптотических линий. Каждая линейчатая поверхность из семейства (46), проходя через некоторый луч комплекса, пересекает ∞^1 расслояющих поверхностей вдоль этого луча по ∞^1 асимптотических линий, которые являются расслояющими линиями для линейчатой поверхности. Таким образом, и в этом случае расслояемая пара T комплексов разлагается на ∞^2 расслояемых пар линейчатых поверхностей. Через каждый луч комплекса проходят ∞^1 конгруэнций $\tilde{(6)}_{II}$, выделяемых ∞^1 расслояющих поверхностей. Каждая пара этих конгруэнций пересекается по линейчатой поверхности. В данном случае линейчатая поверхность (46) принадлежит всем конгруэнциям $\tilde{(6)}_{II}$, когда ρ принимает любые значения. Следовательно, все ∞^1 конгруэнций пересекаются по одной и той же линейчатой поверхности, определяемой уравнениями (46).

Расслоение пар T комплексов III

В этом случае расслояемая пара комплексов определяется системой уравнений III. Дифференцируя уравнения III внешним образом, получаем систему:

$$\left.\begin{array}{rl}
[\varkappa_1\omega_1^4] + [\omega_3^4; \omega_4^2 - \omega_1^3] - [\omega_1^2; \omega_3^1 - \omega_2^4] = 0; & (20')\\
[\Delta a_{11}\omega_1^3] + [2a_{11}\omega_1^2 - (2a_{13} + a_{22})\omega_3^4; \omega_1^4] + [\Delta a_{13}\omega_2^4] = 0; & (a')\\
[2a_{11}\omega_1^2 - (2a_{13} + a_{22})\omega_3^4; \omega_1^3] + [\Delta a_{22}\omega_1^4] + & \\
+ [(2a_{13} + a_{22})\omega_1^2 - 2a_{33}\omega_3^4; \omega_2^4] = 0; & (b')\\
[\Delta a_{13}\omega_1^3] + [(2a_{13} + a_{22})\omega_1^2 - 2a_{33}\omega_3^4; \omega_1^4] + [\Delta a_{33}\omega_2^4] = 0; & (c')\\
a_{11}[\Delta l\omega_1^3] - lA[\omega_3^4\omega_1^4] + [a_{13}\Delta l + l^2\varkappa_1; \omega_2^4] = 0; & (d')\\
[a_{13}\Delta l + l^2\varkappa_1; \omega_1^3] + lA[\omega_1^2\omega_1^4] + a_{33}[\Delta l\omega_2^4] = 0, & (e')
\end{array}\right\} \text{III}'$$

где

$$\Delta a_{11} = da_{11} + a_{11}(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3) + 2a_{11}a_{13}\omega_1^4,$$
$$\Delta a_{13} = da_{13} + a_{13}(\omega_1^1 - \omega_4^4) + \{(a_{13})^2 - a_{11}a_{33}\}\omega_1^4,$$
$$\Delta a_{22} = da_{22} + a_{22}(\omega_1^1 - \omega_4^4),$$

$$\Delta a_{33} = da_{33} + a_{33}(\omega_2{}^2 + \omega_3{}^3 - 2\omega_4{}^4) + 2a_{13}a_{33}\omega_1{}^4,$$
$$\Delta l = a_{22}dl - l\Delta a_{22} + l(A - 2l)\omega_1{}^4, \qquad (47)$$
$$A = 4l + (a_{22})^2.$$

Покажем, что $l = \text{const}$. Для этого разрешаем уравнение (d') относительно неизвестных форм:

$$\Delta l = \lambda_1\omega_1{}^3 + lA\lambda_2\omega_1{}^4 + \lambda_3\omega_2{}^4, \qquad (48)$$
$$-\omega_3{}^4 = a_{11}\lambda_2\omega_1{}^3 + \lambda_4\omega_1{}^4 + \lambda_5\omega_2{}^4,$$
$$a_{11}\Delta l + l^2\varkappa_1 = a_{11}\lambda_3\omega_1{}^3 + lA\lambda_5\omega_1{}^4 + \lambda_6\omega_2{}^4. \qquad (49)$$

Подставляя эти разложения в (e'), получаем

$$\lambda_6 - a_{33}\lambda_1 = 0, \qquad \omega_1{}^2 = \lambda_5\omega_1{}^3 + \lambda_7\omega_1{}^4 + a_{33}\lambda_2\omega_2{}^4.$$

Определяя отсюда $\varkappa_1, \omega_1{}^2$, $\omega_3{}^4$ и подставляя в $(20')$, получим два уравнения на параметры:

$$a_{11}\lambda_3 - a_{13}\lambda_1 + l(a_{13}a_{22} - 2l)\lambda_4 + la_{11}a_{22}\lambda_7 = 0,$$
$$-a_{13}\lambda_3 + a_{33}\lambda_1 + la_{22}a_{33}\lambda_4 + l(a_{13}a_{22} - 2l)\lambda_7 = 0.$$

Так как определитель из коэффициентов при λ_1, λ_3 не равен нулю вследствие соотношения (43), то из этих уравнений можно выразить λ_1, λ_3 через λ_4, λ_7:

$$\lambda_1 = -l\{(2a_{13} + a_{22})\lambda_4 + 2a_{11}\lambda_7\},$$
$$\lambda_3 = -l\{2a_{33}\lambda_4 + (2a_{13} + a_{22})\lambda_7\}. \qquad (50)$$

Определяя Δa_{22} из (47), (48), (50) и подставляя в уравнение (b') выражение Δa_{22} и разложения форм $\omega_1{}^2$, $\omega_3{}^4$, получаем $[dl\omega_1{}^4] = 0$, если $a_{22} \neq 0$, то есть $dl = \mu\omega_1{}^4$. Теперь остается показать, что $\mu = 0$.

После подстановки выражений форм $\omega_1{}^2$, $\omega_3{}^4$ в уравнения (a') и (c'), оставшиеся от системы III′, можно будет записать:

$$[\tilde{\Delta}a_{11}\omega_1{}^3] + [\tilde{\Delta}a_{13}\omega_2{}^4] = 0; \quad (\tilde{a}') \qquad [\tilde{\Delta}a_{13}\omega_1{}^3] + [\tilde{\Delta}a_{33}\omega_2{}^4] = 0, \quad (\tilde{c}')$$

где

$$\tilde{\Delta}a_{11} = \Delta a_{11} - a_{11}\{(2a_{13} + a_{22})\lambda_2 + 2\lambda_5\}\omega_1{}^4,$$
$$\tilde{\Delta}a_{13} = \Delta a_{13} - \{2a_{11}a_{33}\lambda_2 + (2a_{13} + a_{22})\lambda_5\}\omega_1{}^4,$$
$$\tilde{\Delta}a_{33} = \Delta a_{33} - a_{33}\{(2a_{13} + a_{22})\lambda_2 + 2\lambda_5\}\omega_1{}^4.$$

Дифференцируя конечное соотношение $l = (a_{13})^2 - a_{11}a_{33} + a_{13}a_{22}$, заменяя дифференциалы da_{ik} через $\tilde{\Delta}a_{11}$, $\tilde{\Delta}a_{13}$, $\tilde{\Delta}a_{33}$ и выражение Δl — (48) и используя выражения (49) и (b), получаем:

$$\mu\{(a_{13})^2 - a_{11}a_{33}\}\omega_1{}^4 = l\{(2a_{13} + a_{22})\tilde{\Delta}a_{13} - a_{33}\tilde{\Delta}a_{11} - a_{11}\tilde{\Delta}a_{33}\} -$$
$$- a_{11}\lambda_3\omega_1{}^3 - a_{33}\lambda_1\omega_2{}^4. \qquad (51)$$

Формы $\tilde{\Delta a_{11}}$, $\tilde{\Delta a_{13}}$, $\tilde{\Delta a_{33}}$ из уравнений $(\tilde{a'})$ и $(\tilde{c'})$ выражаются только через ω_1^3 и ω_2^4. В уравнении (51), вследствие независимости на комплексе форм ω_1^3, ω_1^4, ω_2^4, коэффициенты при этих формах должны равняться нулю. Коэффициент при ω_1^4 имеет вид: $\mu\{(a_{13})^2 - a_{11}a_{33}\} = 0$, откуда следует в силу (43) $\mu = 0$. Следовательно, $l = \text{const}$. Присоединяем к системе уравнений III, III′ полученное конечное соотношение

$$(a_{13})^2 - a_{11}a_{33} + a_{13}a_{22} = \text{const}. \tag{52}$$

и его дифференциал

$$(2a_{13} + a_{22})\Delta a_{13} - a_{33}\Delta a_{11} - a_{11}\Delta a_{33} + a_{13}\tilde{\Delta a}_{22} - l\varkappa_1 = 0, \tag{52′}$$

где

$$\tilde{\Delta a}_{22} = \Delta a_{22} + (2l - A)\,\omega_1^1.$$

Исключаем, пользуясь этим соотношением, форму $l\varkappa_1$ в уравнениях (20′) (d'), (e'):

$$[(2a_{13} + a_{22})\Delta a_{13} - a_{33}\Delta a_{11} - a_{11}\Delta a_{33};\ \omega_1^4] - a_{11}[(2a_{13} + a_{22})\omega_1^2 -$$
$$- 2a_{33}\omega_3^4;\ \omega_1^3] - a_{33}[2a_{11}\omega_1^2 - (2a_{13} + a_{22})\omega_3^4;\ \omega_2^4] = 0. \tag{$\tilde{20'}$}$$

В (d'), (e') исключаем ω_3^4, ω_1^2, пользуясь уравнениями (a') и (c'), получаем:

$$[a_{33}\Delta a_{11} - a_{11}\Delta a_{33};\ \omega_1^3] - [a_{33}(\tilde{\Delta a}_{22} - 2\Delta a_{13}) +$$
$$+ (2a_{13} + a_{22})\Delta a_{33};\ \omega_2^4] = 0; \tag{$\tilde{d'}$}$$

$$[a_{11}(\tilde{\Delta a}_{22} - 2\Delta a_{13}) + (2a_{13} + a_{22})\Delta a_{11};\ \omega_1^3] +$$
$$+ [a_{33}\Delta a_{11} - a_{11}\Delta a_{33};\ \omega_2^4] = 0. \tag{$\tilde{e'}$}$$

Уравнение (b') не изменится, если вместо Δa_{22} подставим $\tilde{\Delta a}_{22}$. Расслояемая пара комплексов определяется системой, состоящей из конечного соотношения (52), уравнений Пфаффа III и (52′), квадратичных уравнений (20′), (a'), (b'), (c'), $(\tilde{d'})$, $(\tilde{e'})$. Характеристическая система форм содержит: три формы, независимые на искомом интегральном многообразии; девять форм, стоящих в левых частях уравнений Пфаффа; шесть форм, полученных алгебраическим дифференцированием квадратичных уравнений. Следовательно, $q=6$. Разрешая уравнения (a'), запишем:

$$\left.\begin{aligned} \Delta a_{11} &= \nu_1\omega_1^3 + \nu_2\omega_1^4 + \nu_3\omega_2^4; \\ 2a_{11}\omega_1^2 - (2a_{13} + a_{22})\,\omega_3^4 &= \nu_2\omega_1^3 + \nu_4\omega_1^4 + \nu_5\omega_2^4; \\ \Delta a_{13} &= \nu_3\omega_1^3 + \nu_5\omega_1^4 + \nu_6\omega_2^4. \end{aligned}\right| \tag{53}$$

Из (b') получим:

$$\tilde{\Delta a_{22}} = \nu_4\omega_1^3 + \nu_7\omega_1^4 + \nu_8\omega_2^4;$$

$$(2a_{13} + a_{22})\omega_1^2 - 2a_{33}\omega_3^4 = \nu_5\omega_1^3 + \nu_8\omega_1^4 + \nu_9\omega_2^4. \qquad (54)$$

Подставляя полученные разложения Δa_{13} и $(2a_{13} + a_{22})\omega_1^2 - 2a_{33}\omega_3^4$ в (c'), найдем

$$\Delta a_{33} = \nu_6\omega_1^3 + \nu_9\omega_1^4 + \nu_{10}\omega_2^4. \qquad (55)$$

Вносим полученные разложения (53), (54), (55) в уравнения $(\tilde{d'})$, $(\tilde{e'})$. Получаем следующие конечные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} a_{33}(\nu_7 - 2\nu_5) + (2a_{13} + a_{22})\nu_9 &= 0;\\ a_{33}(\nu_4 - \nu_3) + (2a_{13} + a_{22})\nu_6 - a_{11}\nu_{10} &= 0;\\ a_{11}(\nu_7 - 2\nu_5) + (2a_{13} + a_{22})\nu_2 &= 0;\\ a_{11}(\nu_8 - \nu_6) + (2a_{13} + a_{22})\nu_3 - a_{33}\nu_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Отсюда найдем ν_2, ν_3, ν_6, ν_9, если $2a_{13} + a_{22} \neq 0$. Уравнение $(\tilde{20'})$ удовлетворяется тождественно разложениями (53) — (55) и соотношениями (56). Следовательно, система шести квадратичных уравнений: (a'), (b'), (c'), $(\tilde{d'})$, $(\tilde{e'})$, $(\tilde{20'})$ эквивалентна системе пяти уравнений: (a'), (b'), (c'), $(\tilde{d'})$, $(\tilde{e'})$. В разложениях (53) — (55) после исключения ν_2, ν_3, ν_6, ν_9, при помощи уравнений (56) останутся шесть независимых параметров.

Расслояемая пара комплексов в этом случае существует, если система уравнений III, (52), (a'), (b'), (c'), $(\tilde{d'})$, $(\tilde{e'})$, $(\tilde{20'})$ определяет трехмерное интегральное многообразие, на котором $[\omega_1^3\omega_1^4\omega_2^4] \neq 0$. На линейном интегральном элементе E_1 шесть форм Δa_{11}, Δa_{13}, $\tilde{\Delta a_{33}}$, $\tilde{\Delta a_{22}}$, ω_1^2, ω_3^4 задаются произвольно. На двумерном интегральном элементе все шесть форм вполне определены. Следовательно, характеры системы следующие: $s_1 = 6$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. Число Картана $Q = 6$. Разрешая уравнения системы, получили, что наиболее общий интегральный элемент определяется с произволом $N = 6$ параметров. Система в инволюции, и расслояемая пара комплексов существует с произволом шести функций одного элемента.

В этом случае каждая пара конгруэнций из однопараметрического семейства конгруэнций, проходящих через некоторый луч комплекса, будет пересекаться по линейчатой поверхности. Через произвольный луч комплекса будут проходить ∞^2 таких линейчатых поверхностей. На втором комплексе им соответствуют ∞^2 линейчатых поверхностей, проходящих через соответствующий луч. В этом случае расслояемая пара комплексов не разлагается на расслояемые пары линейчатых поверхностей.

Кроме рассмотренных трех основных случаев расслоения комплексов, имеем еще два подслучая 4 и 5 расслояемых пар комплексов I.

Расслоение пар T комплексов IV и V

Пара комплексов в случае IV определяется системой IV. Дифференцируя уравнения IV, получаем систему:

$$\left.\begin{array}{rr}
p[\varkappa_1\omega_1^4] - 2[\omega_3^4; p\omega_1^3 + \omega_1^4] + 2p[\omega_1^2\omega_2^4] = 0; & (20')\\
[\Delta a_{12}; p\omega_1^3 + \omega_1^4] + p[\Delta a_{23}\omega_2^4] = 0; & (a')\\
[a_{12}\Delta p + 2p^2 a_{23}\omega_3^4; p\omega_1^3 + \omega_1^4] + p[a_{23}\Delta p + pa_{33} \times & \\
\times \{2\omega_3^4 + a_{12}(p\omega_1^3 + \omega_1^4)\}; \omega_2^4] = 0; & (b')\\
[\Delta a_{23}; p\omega_1^3 + \omega_1^4] + p[\Delta a_{33}\omega_2^4] = 0; & (c')\\
[\varkappa_1 + 2pa_{23}\omega_1^4; \omega_2^4] - 2[2\omega_3^4 + a_{12}(p\omega_1^3 + \omega_1^4); \omega_1^4] = 0; & (d')\\
2[\Delta p\omega_1^4] - p[\varkappa_1 + 2pa_{23}\omega_1^4; p\omega_1^3 + \omega_1^4] = 0, & (e')
\end{array}\right\} \text{IV}'$$

где

$$\Delta a_{23} = d(pa_{23}) + pa_{23}(\omega_1^1 - \omega_4^4 - \frac{\varkappa_1}{2}) + a_{12}\omega_1^2 - a_{23}\omega_3^4;$$

$$\Delta a_{12} = d(pa_{12}) + pa_{12}\left(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 - \frac{\varkappa_1}{2}\right) - 2a_{12}\omega_3^4;$$

$$\Delta a_{33} = da_{33} + a_{33}\left(\omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4 - \frac{\varkappa_1}{2}\right) + 2a_{23}\omega_1^2;$$

$$\Delta p = dp + p(\omega_1^1 - \omega_2^2) + p^2\psi_1 + \omega_2^1 - p^2 a_{23}(p\omega_1^3 + \omega_1^4).$$

Система уравнений IV, IV′ не в инволюции. Продолжаем систему IV, присоединяя к ней уравнения:

$$\varkappa_1 - 2(\lambda - pa_{23})\omega_1^4 = 0; \qquad \varphi_1 - (\lambda - pa_{23})\omega_2^4 = 0;$$

$$\Delta p + p\lambda(p\omega_1^3 + \omega_1^4) = 0, \qquad (f)$$

полученные разрешением ковариантов (e'), (d'), (b'), и при использовании уравнения (a) системы IV. Внешние дифференциалы продолженной системы имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l}
[2p\omega_1^2 - \lambda(p\omega_1^3 + \omega_1^4); \omega_2^4] = 0;\ [\Delta a_{12}; p\omega_1^3 + \omega_1^4] + p[\Delta a_{23}\omega_2^4] = 0;\\
[\Delta a_{23}; p\omega_1^3 + \omega_1^4] + p[\Delta a_{33}\omega_2^4] = 0;\ [\Delta\lambda\omega_1^3] = 0;\ [\Delta\lambda\omega_1^4] = 0;\\
[\Delta\lambda\omega_2^4] = 0,
\end{array}\right\} \text{IV}_f'$$

где

$$\Delta\lambda = 2pd(\lambda - pa_{23}) + \{4 - (\lambda - pa_{23})^2\}\omega_2^4.$$

Из уравнений IV_f' вытекает соотношение:

$$\Delta\lambda = 0. \qquad (g)$$

Присоединяем его к системе IV, (f). Система ковариантов урав-

нений IV', (*f*), (*g*) содержит только три квадратичных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &[2p\omega_1^2 - \lambda(p\omega_1^3 + \omega_1^4); \omega_2^4] = 0;\\ &[\Delta a_{12}; p\omega_1^3 + \omega_1^4] + p[\Delta a_{23}\omega_2^4] = 0;\\ &[\Delta a_{23}; p\omega_1^3 + \omega_1^4] + p[\Delta a_{33}\omega_2^4] = 0. \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{IV_g'}$$

В характеристическую систему входят формы, стоящие в левых частях уравнений Пфаффа IV, (*f*), (*g*), формы, независимые на интегральном многообразии, и еще четыре формы ω_1^2, Δa_{12}, Δa_{23}, Δa_{33}, полученные алгебраическим дифференцированием квадратичных уравнений. Следовательно, $q = 4$, характеры системы: $s_1 = 3$, $s_2 = 1$, $s_3 = 0$. Число Картана $Q = 5$, произвол наиболее общего интегрального элемента $N = 5$. Следовательно, система в инволюции и расслояемая пара комплексов определяется произволом одной функции двух аргументов.

Так как алгебраическое дифференцирование ковариантов $\mathrm{IV_g'}$, по формам ω_1^2, Δa_{12}, Δa_{23}, Δa_{33} приводят только к двум независимым уравнениям:

$$\omega_2^4 = 0, \qquad p\omega_1^3 + \omega_1^4 = 0, \tag{57}$$

то и в этом случае расслояемая пара комплексов обладает характеристическими многообразиями. Характеристическими многообразиями являются ∞^2 линейчатых поверхностей, определяемых на интегральном многообразии уравнениями (57). Через каждый луч комплекса проходит одна из поверхностей (57). Уравнение конгруэнции, выделяемой расслояющей поверхностью, имеет вид:

$$\{\rho(p\rho - 1)a_{11} + pa_{23}\}(p\omega_1^3 + \omega_1^4) + p\{\rho(p\rho - 1)a_{23} + a_{33}\}\omega_2^4 = 0. \tag{$\tilde{6}$}_{\mathrm{IV}}$$

Конгруэнции $(\tilde{6})_{\mathrm{IV}}$ вдоль каждого луча пересекаются по одной из линейчатых поверхностей (57). Асимптотические линии на расслояющих поверхностях определяются уравнением: $\omega_2^4(p\omega_1^3 - y\omega_2^4) = 0$. Одно семейство линий, определяемых уравнением $\omega_2^4 = 0$, независящим от ρ, соответствует на всех расслояемых поверхностях. Из конгруэнции $(\tilde{6})_{\mathrm{IV}}$ это семейство линий выделяет линейчатые поверхности $\omega_2^4 = 0$, $p\omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$, которые совпадают с характеристическими линейчатыми поверхностями. Следовательно, каждая линейчатая поверхность (57) несет ∞^1 расслояющих кривых. Пара комплексов распадается на ∞^2 расслояемых пар линейчатых поверхностей.

В случае V пара комплексов определяется системой V. Система ковариантов содержит квадратичные уравнения:

$$
\left.\begin{aligned}
q\,[\varkappa_1\omega_1{}^4] - 2q\,[\omega_3{}^4\omega_1{}^3] + 2\ \omega_1{}^2;\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4] &= 0; && (20')\\
q\,[\Delta a_{11}\omega_1{}^3] + [\Delta a_{12};\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4] &= 0; && (a')\\
q\,[a_{12}\Delta q - qa_{11}\{2\omega_1{}^2 - a_{23}(\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4)\};\omega_1{}^3] + & \\
+ [a_{23}\Delta q - 2q^2a_{12}\omega_1{}^2;\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4] &= 0; && (b')\\
q\,[\Delta a_{12}\omega_1{}^3] + [\Delta a_{23};\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4] &= 0; && (c')\\
[\varkappa_1 + 2qa_{12}\omega_1{}^4;\omega_2{}^4] + 2\,[2\omega_1{}^2 - a_{23}(\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4);\omega_1{}^4] &= 0; && (d')\\
2\,[\Delta q\omega_1{}^4] - q\,[\varkappa_1 + 2qa_{12}\omega_1{}^4;\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4] &= 0, && (e')
\end{aligned}\right\} \quad V'
$$

где

$$\Delta a_{11} = da_{11} + a_{11}\left(2\omega_1{}^1 - \omega_2{}^2 - \omega_3{}^3 - \frac{\varkappa_1}{2}\right) - 2a_{12}\omega_3{}^4;$$

$$\Delta a_{12} = d\,(qa_{12}) + qa_{12}\left(\omega_1{}^1 - \omega_4{}^4 - \frac{\varkappa_1}{2}\right) + a_{12}\omega_1{}^2 - a_{23}\omega_3{}^4;$$

$$\Delta a_{23} = d\,(qa_{23}) + qa_{23}\left(\omega_2{}^2 + \omega_3{}^3 - 2\omega_4{}^4 - \frac{\varkappa_1}{2}\right) + 2a_{23}\omega_1{}^2;$$

$$\Delta q = dq + q\,(\omega_3{}^3 - \omega_4{}^4) - q^2\varphi_1 - \omega_4{}^3 - q^2a_{12}\,(\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4).$$

Система уравнений V, V′ не в инволюции. Продолжаем систему, присоединяя уравнения, полученные разрешением ковариантов (e'), (d'), (b') относительно форм:

$$\varkappa_1 + 2qa_{12}\omega_1{}^4, \quad \Delta q, \quad 2\omega_1{}^2 - a_{23}\,(\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4)$$

(при этом пользовались уравнением (c) системы V):

$$\varkappa_1 - 2\,(\tilde{\lambda} - qa_{12})\,\omega_1{}^4 = 0; \qquad \psi_1 + (\tilde{\lambda} - qa_{12})\,\omega_1{}^3 = 0;$$

$$\Delta q + q\tilde{\lambda}\,(\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4) = 0. \qquad (f)$$

Коварианты продолженной системы V, (f) имеют вид:

$$
\left.\begin{aligned}
[2q\omega_3{}^4 + \tilde{\lambda}\,(\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4);\omega_1{}^3] &= 0;\\
q[\Delta a_{11}\omega_1{}^3] + [\Delta a_{12};\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4] &= 0;\\
q\,[\Delta a_{12}\omega_1{}^3] + [\Delta a_{23};\omega_1{}^4 + q\omega_2{}^4] &= 0;\\
[\Delta\tilde{\lambda}\omega_1{}^3] = 0; \quad [\Delta\tilde{\lambda}\omega_1{}^4] &= 0; \quad [\Delta\tilde{\lambda}\omega_2{}^4] = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (V_f')
$$

где

$$\Delta\lambda = 2qd\,(\lambda - qa_{12}) + \{4 - (\tilde{\lambda} - qa_{12})^2\}\,\omega_1{}^3.$$

Из уравнений V_f' имеем

$$\Delta\tilde{\lambda} = 0. \qquad (g)$$

Присоединяем (g) к системе V, (f). Система ковариантов уравнений V, (f), (g) содержит только три квадратичных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &[2q\omega_3{}^1+\tilde{\lambda}(\omega_1{}^4+q\omega_2{}^4);\ \omega_1{}^3]=0;\\ &q\,[\Delta a_{11}\omega_1{}^3]+[\Delta a_{12};\omega_1{}^4+q\omega_2{}^4]=0;\\ &q\,[\Delta a_{12}\omega_1{}^3]+[\Delta a_{23};\ \omega_1{}^4+q\omega_2{}^4]=0. \end{aligned}\right\} \quad V_g'$$

Алгебраическим дифференцированием V_g' получаем: $\omega_3{}^4$, Δa_{11}, Δa_{12}, Δa_{23}. Отсюда имеем $q=4$. Характеры системы следующие: $s_1=3$, $s_2=1$, $s_3=0$. Произвол цепи интегральных элементов $Q=5$ совпадает с произволом наиболее общего интегрального элемента $N=5$. Следовательно, система в инволюции и определяет расслояемую пару комплексов с произволом одной функции двух аргументов. Алгебраическое дифференцирование ковариантов V_g' по формам $\omega_3{}^4$, Δa_{11}, Δa_{12}, Δa_{23} и в этом случае приводит только к двум независимым уравнениям на независимые главные формы на интегральном многообразии. Следовательно, интегральное многообразие несет характеристики. Характеристиками являются ∞^2 линейчатых поверхностей, определяемых на расслояемой паре комплексов уравнениями

$$\omega_1{}^3=0,\quad \omega_1{}^4+q\omega_2{}^4=0. \tag{58}$$

Асимптотические линии на расслояющих поверхностях определяются уравнением $\omega_1{}^3(q\omega_1{}^3-q\omega_2{}^4)=0$. Одно семейство асимптотических, определяемых уравнением $\omega_1{}^3=0$, соответствует на всех расслояющих поверхностях. Кривые этого семейства выделяют из конгруэнций

$$q\{\rho^2a_{11}-(\rho-q)a_{12}\}\omega_1{}^3+\{\rho^2qa_{12}-(\rho-q)a_{23}\}(\omega_1{}^4+q\omega_2{}^4)=0, \quad \tilde{(6)}_V$$

соответствующих расслояющим поверхностям, линейчатые поверхности, совпадающие с поверхностями (58). Следовательно, на каждой линейчатой поверхности (58) имеются ∞^1 расслояющих кривых, соответствующих асимптотическим линиям расслояющих поверхностей. Расслояемая пара комплексов разлагается на ∞^2 расслояемых пар линейчатых поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. С. П. Фиников «**Проективно-дифференциальная геометрия**», М., 1937.

[2]. В. И. Коровин. **ДАН СССР, 72, 837** (1950).

[3]. Р. М. Гейдельман. **Мат. сб. 34** (76), 499 (1956).

[4]. С. П. Фиников. **Изв. АН СССР, сер. мат., 9, № 2** (1945).

[5]. С. П. Фиников. **Уч. записки МГПИ им. Потемкина, 11, вып. 2** (1948).

[6]. Н. В. Лактанова. **Уч. записки МГПИ им. Потемкина, 35, вып. 4** (1955).

[7]. Г. Г. Баширова. **Труды СамГУ, новая серия, вып. 107.** (1961).

[8]. М. А. Акивис. **Мат. сб 27, вып 3, 351** (1950).

[9]. С. П. Фиников. «**Метод внешних форм Картана**» Л.—М. 1948.

Л. Г. ЯКОВЛЕВ, М. И. ФАЙНГОЛЬД,
Э. М. БАШИРОВ

ОСОБЕННОСТИ РАССЕЯНИЯ НА ПОТЕНЦИАЛАХ ВИДА $\pm \alpha r^{-\kappa}$

Классический (не квантовый) расчет эффективных сечений при рассеянии частиц, взаимодействующих по закону $V(r) = \pm \alpha r^{-\kappa}$ как в нерелятивистском (в дальнейшем-НР), так и в релятивистском (Р) случаях сравнительно просто проводится лишь при $\kappa < 2$ в НР случае и при $\kappa < 1$ в Р случае. Если же $\kappa \geqslant 2$ (или $\kappa \geqslant 1$ в Р случае), при рассеянии может возникнуть «закручивание» траектории, усложняющее расчеты. В данной работе исследуются особенности расчета в этих случаях.

Для расчета эффективных сечений необходимо иметь уравнение траектории частицы с приведенной массой, движущейся в центральном поле $V(r)$. Уравнение траектории проще всего получается с помощью уравнения Гамильтона-Якоби

НР
$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2\right] - V(r) = 0. \qquad (1)$$

Р
$$-\left(\frac{\partial s}{\partial t} + V\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2 + 1 = 0. \qquad (2)$$

$$(m = 1, \quad c = 1)$$

Уравнения выписаны для плоского движения вследствие аксиальной симметрии задачи.

Так как $V(r)$ не содержит t и φ, имеем два первых интеграла и решение ищем в виде

$$S = -Et + L\varphi + f(r). \qquad (3)$$

Из (1) и (2) находим $f(r)$, а затем уравнение траектории из уравнения $\frac{\partial s}{\partial L} = 0$ (при $r_0 = \infty$, $\varphi_0 = 0$).

В НР случае получаем

$$\varphi = \rho \int_r^\infty r^{-2}\left(1 - \frac{V}{E} - \frac{\rho^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr. \qquad (4)$$

В Р случае:

$$\varphi = \rho(\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}}\int_{r}^{\infty} r^{-2}\left[(\varepsilon-V)^2-\frac{\rho^2}{r^2}(\varepsilon^2-1)-1\right]^{-\frac{1}{2}}dr. \quad (5)$$

Для расчета угловых распределений следует найти прицельный параметр, как функцию угла рассеяния $\rho=\rho(\Theta)$, и тогда $\frac{d\tau}{d\Theta}=\pi\frac{d\rho^2}{d\Theta}$.

Угол рассеяния Θ определяется углом между асимптотами траектории частицы с приведенной массой. Угол между асимптотами—удвоенное значение угла $\varphi(r_1)$, на который поворачивается радиус-вектор при движении частицы из бесконечности до точки наибольшего сближении (точки поворота). Расстояние наибольшего сближения определяется из условия равенства нулю $\dot{r}$ или радиальной составляющей импульса P_r, т. е. $r=r_1$ — корень полиномов, стоящих под радикалами в (4) и (5), т. к. радикалы представляют P_r.

При отталкивании угол между асимптотами $2\varphi<\pi$, и угол рассеяния $\Theta=\pi-2\varphi$. Расчет сечений не представляет труда.

Далее рассмотрим лишь случай притяжения. При этом для $k<1$ в Р случае и при $\kappa<2$ в НР случае $\pi\leqslant 2\varphi\leqslant 2\pi$, и угол рассеяния $\Theta=2\varphi-\pi$. Точка поворота и сечение определяются легко. Рассмотрим $k\geqslant 1$ в Р и $k\geqslant 2$ в НР. Для определения точки поворота имеем уравнения

$$y^{\kappa}-y^{\kappa-2}+A=0, \quad (6)$$

$$y^{2\kappa}-By^{2\kappa-2}+Cy^{\kappa}+D=0, \quad (7)$$

где

$$y\equiv\frac{r}{\rho}; \quad A\equiv\frac{\alpha}{\rho^{\kappa}\cdot E}; \quad B\equiv 1; \quad C\equiv\frac{2\alpha E}{\rho^{\kappa}(\varepsilon^2-1)}; \quad D\equiv\frac{\rho^2}{\rho^{2\kappa}(\varepsilon^2-1)}.$$

Покажем, что для притяжения в Р случае при $k\geqslant 1$ и в НР случае при $k\geqslant 2$ угол 2φ может быть больше 2π. Формулы (4) и (5) могут быть представлены в виде

$$\varphi=\int_{y_1}^{\infty}\frac{y^{\frac{\kappa}{2}-2}dy}{\sqrt{(y^{\kappa}-y_1^{\kappa})(y^{\kappa-2}-y_1^{\kappa-2})}}. \quad (8)$$

По правилу Декарта уравнения (6) и (7) имеют не более двух положительных корней[1]; точке поворота соответствует, конечно, больший из них. В «критическом» случае оба корня равны. Из (6) и (7) легко находим этот кратный корень:

[1] При $k=1$ в Р и $k=2$ в НР — один корень и $r_{кр}=0$.

в НР $r_{кр} = \rho_{кр}\left(\frac{k-2}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\rho_{кр} = k^{\frac{1}{2}}(k-2)^{\frac{\kappa-2}{2\kappa}}\left(\frac{\alpha}{2E}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$, (9)

в Р $r_{кр} = \frac{n-2}{2}\ \frac{\alpha\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\ (1+\sqrt{1+\xi})$;

(10)

$$\rho_{кр} = \left(\frac{\alpha\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2n}}}{(1+\sqrt{1+\xi})^{\frac{n-2}{2n}}}\left(\frac{n}{2}+\frac{n-2}{2}\sqrt{1+\xi}\right)^{\frac{1}{2}},$$ где

$$\xi \equiv \frac{4(n-1)}{(n-2)^2}\cdot\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}.$$

При тех значениях параметров, при которых положительных корней нет (в случае притяжения) происходит «падение» на центр.

Различные случаи (НР) иллюстрирует рис. 1: пунктирная

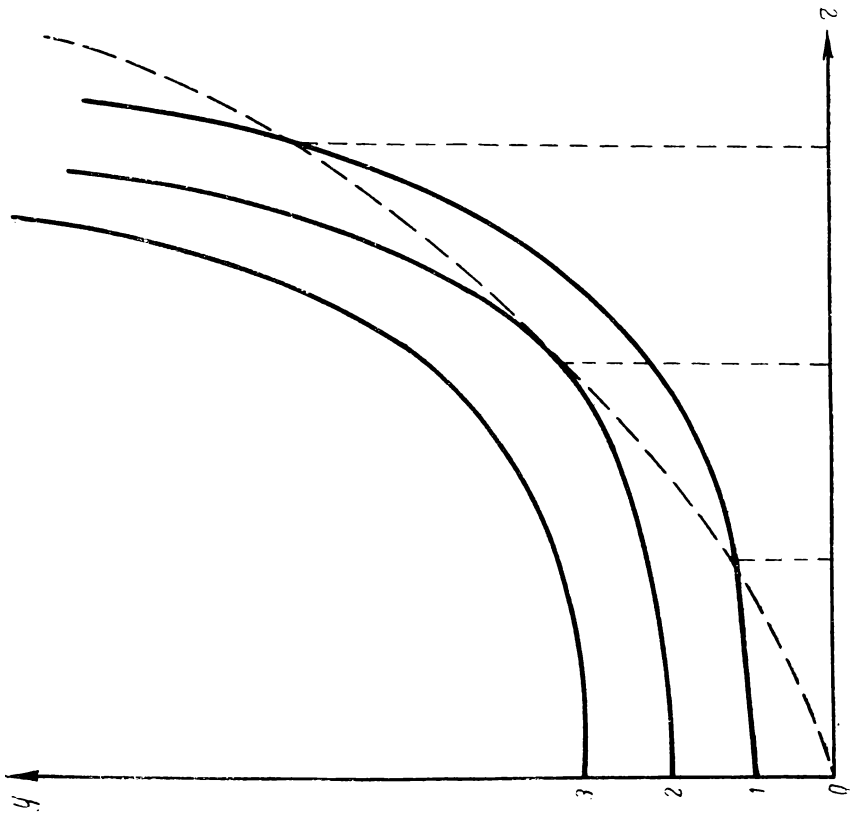

Рис. 1.

кривая представляет $y^{\kappa-2}$; сплошные — $y_\kappa + A$; *1* соответствует наличию двух корней, *2* — критический случай, 3 — отсутствие корней. Очевидно, что в общем случае $\rho_{кр} \leqslant r_1 \leqslant \rho$.

Так как полином, стоящий под радикалом в (8), имеет два корня, его можно представить в виде $P_n(y) = (y - y_1)(y - y_2)P_{n-2}(y)$. Полином $P_{n-2}(y) > 0$ в области интегрирования, так как других положительных корней нет, а весь полином неотрицателен. Тогда по теореме о среднем

$$\varphi = [P_{n-2}(\xi)]^{-\frac{1}{2}} \xi^{\frac{n}{2}-2} \int_{y_1}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(y-y_1)(y-y_2)}}, \quad (y_1 \leq \xi < \infty). \tag{11}$$

Очевидно, что интеграл неограничен и стремится к бесконечности при $y_2 \to y_1$.

Следовательно, при движении в поле $-\frac{\alpha}{r^k}$ ($k \geqslant 2$ в НР и $k \geqslant 1$ в Р) частица может совершить при рассеянии несколько витков вокруг центра, и траектория имеет вид, представленный на рис. 2. «Закручивание» траектории объясняется конку-

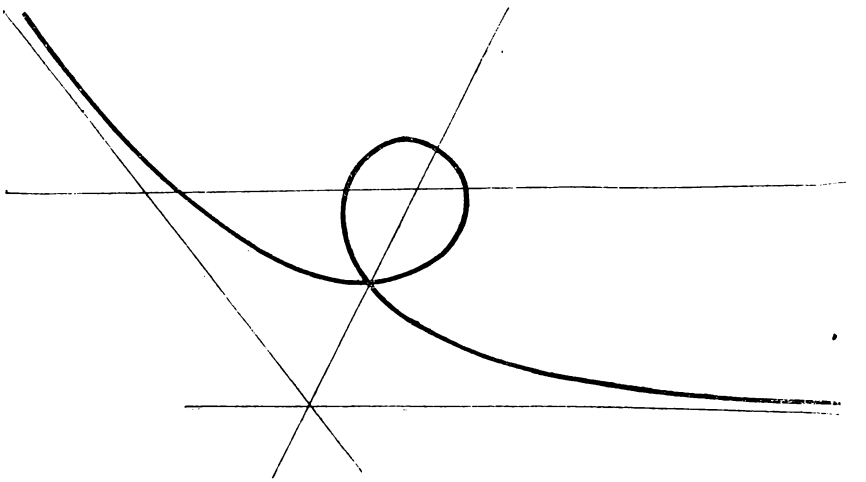

Рис. 2.

ренцией между силами притяжения и центробежными силами, имеющими в НР случае вид L^2r^{-3}, а в Р случае — $L^2r^{-3}[\varepsilon - V(r)]^{-1}$. При фиксированной энергии поток частиц по прицельному параметру ρ разделяется на три части: частицы, движущиеся с прицельным параметром большим, чем определяемый из условия $\varphi(r, \rho, E) = \pi$, рассеиваются без «закручивания»; частицы с $0 \leq \rho \leq \rho_{кр}$ (см. (9) и (10)) «падают» на центр; в промежутке

между этими областями лежит область рассеяния с «закручиванием», разделяющаяся на бесконечное число полос с одним, двумя и т. д. оборотами.

В области рассеяния без закручивания $\Theta_0 = 2\varphi_0 - \pi$, $2\varphi_0 = \Theta_0 + \pi$. В каждой полосе с закручиванием

$$\begin{aligned} \Theta_n &= |(2n+1)\pi \mp 2\varphi_n| \\ 2\varphi_n &= (2n+1)\pi \mp \Theta_n. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, одно и то же Θ соответствует различным ρ, следовательно, $\rho(\Theta)$ — функция многозначная и

$$\frac{d\sigma}{d\Theta} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\rho_n^2}{d\Theta}. \tag{13}$$

Рассмотрим примеры.

1. $V(r) = -\alpha r^{-2}$ НР случай.

По формуле (9) $r_{кр} = 0$, т. е. область падения вырождается в точку. С помощью формулы (3) вычисляем $2\varphi(\rho)$:

$$2\varphi(\rho) = \frac{2\pi}{(1-\beta_1)^{1/2}}; \qquad \beta_1 \equiv \frac{\alpha}{E\rho^2}. \tag{14}$$

Из (14) находим, что верхняя граница области закручивания

$$\rho_3 = 2\sqrt{\frac{\alpha}{3E}}. \tag{15}$$

При $\rho > \rho_3$ — рассеяние без закручивания. Из (12) и (14) $\frac{\pi}{(1-\beta_1)^{1/2}} = \pi - \Theta_0$ и отсюда для этой области

$$\frac{d\sigma}{d\Theta_0} = \frac{2\pi\pi^3}{E} \cdot \frac{\pi - \Theta}{[(\pi-\Theta)^2 - \pi^2]^2}. \tag{16}$$

В области $\rho_3 > \rho > 0$ имеем $\frac{2\pi}{(1-\beta_1)^{1/2}} = (2n+1)\pi \mp \Theta_n$, (17)

n — число витков; для каждого числа витков следует взять обе формулы (17) — как с минусом, так и с плюсом. Это обусловлено аксиальной симметрией рассеяния и тем, что $0 \leqslant \Theta \leqslant \pi$. Далее, проводя подсчет для каждого n и суммируя все распределения (они «накладываются» друг на друга), получаем:

$$\frac{d\sigma}{d\Theta} = \frac{2\pi\pi^3}{E}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi - \Theta}{[[(2n+1)\pi - \Theta]^2 - \pi^2]^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi + \Theta}{[[(2n+1)\pi + \Theta]^2 - \pi^2]^2}\right\}. \tag{18}$$

2. При $k > 2$ в НР случае и $k \geqslant 1$ в Р случае уравнения (3) и (4) не удается решить аналитически относительно ρ, так как в лучшем случае интегрирование в (3) или (4) приводит к трансцендантным уравнениям, включающим тригонометрические функции или эллиптические интегралы [2].

Так в P случае для $k = 1$ получаем

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{L^2 - \alpha^2}} \left| \operatorname{arctg} \frac{\alpha\varepsilon}{\sqrt{(L^2-\alpha^2)(\varepsilon^2-1)}} - \frac{\pi}{2} \right|, \quad (L \equiv \rho\sqrt{\varepsilon^2-1}). \quad (19)$$

Для $k = 2$.

$$\varphi = \frac{1}{2}\delta^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{r_1\sqrt{2}}{r_1+\delta}; \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4\delta}(\beta^2 - \gamma^2)}\right),$$

где

$$\beta \equiv \left(\frac{L^2}{\varepsilon^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \gamma \equiv \left(\frac{2\alpha\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \delta \equiv \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2-1}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$r_1 = \frac{1}{2}\left[\beta^2 - \gamma^2 + \sqrt{(\beta^2-\gamma^2) - 4\delta}\right]. \quad (20)$$

В HP случае для $k = 3$

$$\varphi = \frac{2\rho}{\sqrt{r_1(r_2-r_3)}} F\left(\sqrt{\frac{r_2-r_3}{r_1-r_3}}; \sqrt{\frac{r_2(r_1-r_3)}{r_1(r_2-r_3)}}\right),$$

$$(r_3 < 0 < r_2 < r_1) \quad (21)$$

для $k = 4$

$$\varphi = \frac{\rho}{2\delta_1} F\left(\frac{\delta_1 r_1\sqrt{2}}{r_1^2 + \delta_1^2}; \frac{\sqrt{\rho^2 + 2\delta_1^2}}{2\delta_1}\right), \quad (22)$$

$$\delta_1 \equiv \left(\frac{\alpha}{E}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\rho^2 - 4\delta_1^2)^{\frac{1}{2}} + \rho^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

В ультрарелятивистском приближении задача иногда аналитически решается до конца. В других случаях необходимо применять численные методы расчета. Однако легко убедиться в том, что все полученные выражения неограничены, т. е. существует закручивание и вытекающие отсюда следствия, чего и нужно было ожидать из общего рассмотрения, проведенного выше.

Многозначность $\rho(\Theta)$ создает затруднения при решении обратной задачи.

Следует отметить, что, как видно из (15) (в других случаях — аналогично), размер области закручивания сокращается с увеличением энергии. Вместе с тем в реальных случаях на малых расстояниях притяжение сменяется отталкиванием; это может привести к частичному или полному перекрытию области закручивания. В случае полного перекрытия расчет сечений проводится обычным методом.

Случай частичного перекрытия представляет интерес и будет рассмотрен нами в последующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. «Механика». М., 1958.
[2]. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений». М. 1962.

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ

Обратная задача рассеяния — восстановление потенциала по экспериментальным эффективным сечениям (например, по угловым распределениям). Для классического нерелятивистского рассеяния на потенциалах вида $\pm \alpha r^{-\kappa}$ обратная задача решалась в работах [1], [2]. Задача решается так. При расчете рассеяния потенциальная энергия взаимодействия входит в формулу для угла φ[3]:

$$\varphi = \rho \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{\rho^2}{r^2}}}. \tag{1}$$

Если $\varphi = \varphi(\rho, E)$ известна из эксперимента, уравнение (1) является интегральным уравнением относительно $V(r)$, решение которого дает $V = V(r)$. Очевидно, что ход потенциала определяется только для области, проходимой частицей при рассеянии (достижимая область), так как экспериментально измеряется $\frac{d\sigma}{d\Theta} = f(\Theta, E)$. $\varphi(\rho, E)$ находится так:

$$\rho^2 = 2 \int_{\Theta}^{\pi} f(\Theta, E)\, d\Theta. \tag{2}$$

Из (2) находим $\Theta = \Theta(\rho, E)$, а

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\Theta}{2}. \tag{3}$$

Знак «—» для случая $V(r) = \alpha r^{-\kappa}$, знак «+» для случая $V(r) = -\alpha r^{-\kappa}$. Область пригодности формул рассматривается далее.

Хойт [1] для решения интегрального уравнения (1) применяет подстановку

$$U(r) = V(r) + \frac{L^2}{2r^2} \qquad (L^2 = 2E\rho^2) \tag{4}$$

и получаем

$$\varphi(L,\ E) = \frac{L}{\sqrt{2}} \int_0^E \frac{\frac{d}{dU}\left(\frac{1}{r}\right) dU}{\sqrt{E-U}}. \tag{5}$$

Решение уравнения (5) — уравнения Абеля:

$$\frac{1}{r(U)} = \frac{\sqrt{2}}{\pi L} \int_0^U \frac{\varphi(L,\ E)dE}{\sqrt{U-E}}. \tag{6}$$

В работе [2] исследование применимости метода не проводится.

Фирсов [2] исследует применимость метода Хойта, однако это исследование не полное. Так как область применения метода Хойта ограничена и требуется знание экспериментальной функции двух переменных $f(\Theta,\ E)$, Фирсов развил другой метод, требующий знания экспериментальной функции одной переменной $f(\Theta)$ при фиксированном значении E. Взамен (4) предлагается подстановка

$$\psi = \left(1 - \frac{V}{E}\right) r^2, \tag{7}$$

что дает интегральное уравнение

$$\varphi(\rho) = \rho \int_{\rho^2}^{\infty} \frac{\frac{d}{d\psi}(\ln r)d\psi}{\sqrt{\psi - \rho^2}} \tag{8}$$

решение которого с учетом (3) дает

$$r(\psi) = \sqrt{\psi}\ \exp\left[\pm \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{\psi}}^{\infty} \frac{\Theta(\rho)\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \psi}}\right]. \tag{9}$$

Знак «+» для отталкивания, знак «—» для притяжения. (В работе [2] знак «—» отсутствует, однако его следует учитывать).

Развитые методы сравнительно просто распространяются на релятивистский случай (далее — РС). В РС (1) принимает вид

$$\varphi = \int_{r_1}^{\infty} \frac{\rho \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\, dr}{r^2 \sqrt{(\varepsilon - V)^2 - \frac{\rho^2}{r^2}(\varepsilon^2 - 1) - 1}}. \tag{10}$$

Подстановки

$$U_1 = \frac{L_1^2}{r^2} + 2\varepsilon V - V^2 \quad (L_1 = \rho\sqrt{\varepsilon^2 - 1}) \tag{11}$$

$$\psi_1 = \frac{(\varepsilon - V)^2 - 1}{\varepsilon^2 - 1} r^2 \tag{12}$$

приводят к уравнениям

$$\frac{1}{r(U_1)} = \frac{\sqrt{2}}{\pi L_1} \int_0^{U_1} \frac{\varphi(L_1, \varepsilon^2 - 1)\, \varepsilon d\varepsilon}{\sqrt{U_1 - \varepsilon^2 + 1}}, \tag{13}$$

$$r(\psi_1) = \sqrt{\psi_1} \exp\left[\pm \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{\psi_1}}^{\infty} \frac{\Theta(\rho)\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \psi_1}} \right]. \tag{14}$$

Наиболее важным является анализ применимости методов. Во всех случаях приходится искать обратные функции $\rho = \rho(\Theta, E)$ из (2), $r = r(U)$ или $r = r(U_1)$, $r = r(\psi)$ или $r = r(\psi_1)$ с помощью (4), (7), (11), (12). Отсюда вытекает требование однозначности для этих функций, то есть требование монотонности $\Theta = \Theta(\rho)$, $U(r)$, $\psi(r)$ и т. д. в достижимой области. То, что монотонность требуется лишь в достижимой области, не учтено в [2].

В работе [2] исследован случай немонотонного потенциала $V(r)$, когда на малых расстояниях силы притяжения сменяются силами отталкивания. В этом случае возникает неоднозначность (вообще говоря, трехзначность) $\rho = \rho(\Theta)$. Фирсов указывает путь приближенного решения обратной задачи в этом случае.

Однако, в случае притяжения может возникнуть многозначность $\rho(\Theta)$, обусловленная закручиванием [4], то есть угловое распределение получается как бесконечная сумма угловых распределений частиц, движущихся в различных цилиндрических слоях и совершающих различное число оборотов. Эксперимент дает сразу всю сумму, разделить ее на отдельные слагаемые не представляется возможным; как решать обратную задачу, неясно.

Закручивание возникает в нерелятивистском случае (далее — НРС) при $\kappa \geqslant 2$, в РС при $\kappa \geqslant 1$ для сил притяжения. Отсюда очевидно, что для «чистого» притяжения в НРС метод Фирсова пригоден для $\kappa < 2$ (а не для $\kappa \leqslant 2$, как утверждается в [2]), метод же Хойта в этом случае неприменим, так как при $\kappa < 2$ эффективный потенциал в достижимой области немонотонен ($U(o) \to +\infty$, $U(\infty) \leqslant -0$, $U(r_{extr}) < 0$). В случае отталкивания в НРС оба метода пригодны. Если бы не было закручивания, то метод Фирсова был бы пригоден при $\kappa > 0$, а метод Хойта при $\kappa > 2$, так как соответствующие функции монотонны в достижимой области для рассеиваемых частиц. Эффективный потенциал

$U(r)$ в этом случае немонотонен лишь в той области, которой достигают только частицы, падающие на центр.

При наличии притяжения закручивание должно отсутствовать только для немонотонных потенциалов $V(r)$, когда область отталкивания перекрывает область закручивания. Этого, по-видимому, можно добиться, увеличивая энергию, так как область закручивания сужается с увеличением энергии.

В РС пригодность (11) и (12), то есть распространение методов Хойта и Фирсова на РС, также необходимо исследовать. При отталкивании в РС оба метода пригодны всегда, так как легко показать, что в достижимой области функции $U_1(r)$, $\Psi_1(r)$ монотонны. (Доказательство сводится к доказательству того факта, что минимумы или максимумы функций $U_1(r)$ и $\Psi_1(r)$ лежат глубже точек поворота. Подробности доказательств опущены для краткости.) В РС метод Фирсова был бы пригоден для любых κ, если бы не было закручивания (или если область закручивания перекрыта, хотя здесь возникает трудность немонотонного потенциала). Метод Хойта, как показывает анализ, также применим при притяжении без закручивания для всех $\kappa > 1$.

В качестве примера рассмотрим нахождение потенциала методом Фирсова по известному дифференциальному сечению в НРС

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha}{E} \frac{\pi^2(\pi-\Theta)}{\Theta^2(2\pi-\Theta)^2\sin\Theta}$. Из (2) находим $\rho^2 = \beta\frac{(\pi-\Theta)^2}{\Theta(2\pi-\Theta)}$, $\left(\beta = \frac{\alpha}{E}\right)$, откуда $\Theta = \pi - \frac{\pi\rho}{\sqrt{\rho^2+\beta}}$. Подставляя последнее соотношение в (9) и выбирая знак «+», получим

$$\ln\frac{r}{\sqrt{\psi}} = -\int_{\sqrt{\psi}}^{N}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2+\beta)(\rho^2-\psi)}} + \int_{\sqrt{\psi}}^{N}\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-\psi}}.$$

Произведя замены переменных $\rho^2 = x$ для первого интеграла, интегрируем, после чего устремляем N к ∞. В результате $\frac{r}{\sqrt{\psi}} = \sqrt{1-\frac{\beta}{\psi}}$, откуда

$$V = \frac{\alpha}{r^2},$$

то есть отталкивание в поле с потенциалом обратно пропорциональным квадрату расстояния.

Для сравнения можно эту же задачу решить методом Хойта. Аналогично проделанному найдем $\Theta = \Theta(L)$ и подставим в (3), взятую со знаком «—»:

$$\varphi^{\bullet} = \frac{\pi L}{2\sqrt{L^2 + 2\alpha}}.$$

Интегрируя в (6), получил

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2U}{L^2 + 2\alpha}},$$

откуда

$$U = \frac{L^2}{2r^2} + \frac{\alpha}{r^2}.$$

Из сравнения с (4) вытекает

$$V = \frac{\alpha}{r^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1]. F. C. Hoyt. **Phys, *R*ev, 55,** 664 (1939).
[2]. О. Б. Фирсов. **ЖЭТФ, 33,** 696 (1953).
[3]. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. **«Механика»**. М., 1958.
[4]. Л. Г. Яковлев, М. И. Файигальф, Э. М. Баширов. **Ученые записки УГПИ им. И. Н. Ульянова, 18, вып. 5** (1964)

Л. Г. ЯКОВЛЕВ, И. А. ГИРИН,
Д. Х. ХАЛИКОВА

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РАССЕЯНИЯ

При расчетах соударений двух частиц и дрейфа частиц в веществе необходимо знать соотношения между энергиями, импульсами и углами разлета частиц. Это так называемые кинематические соотношения [1].. Ниже приводятся некоторые из них, полезные при расчетах соударений. Рассматриваются упругие и неупругие соударения, не сопровождающиеся рождением новых частиц.

Исходя из закона сохранения энергии-импульса $P_1+P_2=P_1^1+P^1{}_2$ (P — четырехмерный импульс, $\vec{P}$, iP_4), можно получить формулы, связывающие угол рассеяния χ_n с энергиями и импульсами до и после удара в лабораторной системе координат (одна из частиц покоится до удара):

$$\cos\chi_n = \frac{\alpha_{n-1}E_n - \beta_{n-1}}{P_n} \tag{1}$$

Это соотношение справедливо как в релятивистском, так и в нерелятивистском случаях для любых соударений-упругих и неупругих. В релятивистском случае $E=\sqrt{p^2+m^2}$ (скорость света — единица).

$$\alpha_{n-1} = \frac{m_2 + E_{n-1}}{P_{n-1}} \tag{2}$$

$$\beta_{n-1} = \frac{m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 - M_2^2 + 2m_2E_{n-1}}{2P_{n-1}} \tag{3}$$

m_1, m_2 — массы частиц до столкновения,
M_1, M_2 — массы частиц после столкновения,

E_{n-1}, P_{n-1}, E_n, P_n — энергии и импульсы налетающей частицы до и после столкновения. В случае частично неупругих соударений $M_1 = m_1$ или $M_2 = m_2$. Для упругих соударений $M_1 = m_1$, $M_2 = m_2$ и

$$\alpha_{n-1} = \frac{m_2 + E_{n-1}}{P_{n-1}} \tag{2a}$$

$$\beta_{n-1} = \frac{m_1^2 + m_2 E_{n-1}}{P_{n-1}} \tag{3a}$$

В нерелятивистском случае следует положить $E = \frac{P^2}{2m} + m$. Тогда коэффициенты в формуле (1):

$$\alpha_{n-1} = \frac{M_1 + M_2}{P_{n-1}}$$

$$\beta_{n-1} = \frac{2M_1(M_1 + M_2) + \left(\frac{M_2}{m_1} - 1\right) P_{n-1}^2 - 2M_2\varepsilon}{2P_{n-1}} \tag{4}$$

ε — энергия возбуждения, $\varepsilon = M_1^2 + M_2^2 - m_1^2 - m_2^2$.

При частично неупругих соударениях — такие же замены, как и в релятивистском случае. Для упругого удара:

$$\alpha_{n-1} = \frac{m_1 + m_2}{P_{n-1}},$$

$$\beta_{n-1} \simeq \frac{m_1(m_1 + m_2)}{P_{n-1}}. \tag{4a}$$

При дрейфе частиц в веществе для последовательных упругих соударений в нерелятивистском случае имеем систему уравнений (1) ($\kappa = 1, 2, \ldots, n$):

$$\cos \chi_\kappa = a \frac{P_\kappa}{P_{\kappa-1}} - b \frac{P_{\kappa-1}}{P_\kappa}, \tag{5}$$

где

$$a = \frac{m_1 + m_2}{2m_1}, \qquad b = \frac{m_2 - m_1}{2m_1}.$$

Решая систему (5) относительно P_n, получаем формулу, связывающую импульс после n ударов со всеми углами рассеяния:

$$P_n = \frac{P_0}{(2a)^n} \prod_{i=1}^{n} \gamma_i, \tag{6}$$

где

$$\gamma_i = \cos \chi_i + \sqrt{\cos^2 \chi_i + 4ab}.$$

Пользуясь формулой (1), можно установить соотношения для перехода от распределений по углам к распределениям по энергиям (или импульсам)

$$\frac{d\sigma}{dP_n} = \frac{d\sigma}{d\Omega_n}\,\frac{d\Omega_n}{dP_n}\,(d\Omega = \sin\chi d\chi d\varphi)$$

$$\frac{d(\cos\chi_n)}{dP_n} = \frac{\beta_{n-1}E_n - \alpha_{n-1}M_1^2}{E_n P_n}. \qquad (7)$$

В нерелятивистском случае можно использовать формулу

$$\frac{d(\cos\chi_n)}{dP_n} = \frac{\alpha_{n-1}}{2M_1} + \frac{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}M_1}{P_n^2}. \qquad (8)$$

ЛИТЕРАТУРА

[1]. А. М. Балдин, И. Л. Розенталь, В. И. Гольданский. **«Кинематика ядерных реакций»**. М. 1959.

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ РАССЕЯНИЯ АТОМОВ

Рассматривается S — рассеяние атомов Na на атомах Ta в невозбужденных состояниях, исходя из законов сохранения полного момента количества движения системы I и его проекции M.

Полное эффективное сечение рассеяния частицы в заданном поле сил $U(r)$ выражается через совокупность фаз δ_e[1]

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} {}^{4\pi}/_{\kappa^2}(2l+1)\sin^2\delta_e$$

Для вычисления δ_e надо найти точное решение уравнения Шредингера с заданным потенциалом $U(r)$, что не всегда возможно.

Однако можно получить некоторые сведения о полных сечениях процессов рассеяния, не зная конкретного вида потенциала взаимодействия $U(r)$, подходя к задаче рассеяния чисто феноменологически.

В центрально-симметричном поле сохраняется полный момент количества движения I системы и его проекция M. Рассмотрим с этой точки зрения рассеяние атомов Na на атомах Та. Причем, ограничимся случаем, когда относительный момент сталкивающихся атомов равен нулю, т. е. рассмотрим S — рассеяние. Основное состояние атома Ta есть ${}^4F_{3/2}$, а атома Na— ${}^2S_{1/2}$.

Значения квантового числа полного момента количества движения системы Na—Ta определяются формулами

$$|\, j_1 = j_2 \,| \leqslant I \leqslant j_1 + j_2,$$

где $j_1 = {}^3/_2$, $j_2 = {}^1/_2$ — квантовые числа полных моментов количества движения атомов Ta и Na соответственно.

Отсюда следует, что полный момент системы Na—Ta может принимать два значения $I=1$ и $I=2$. Для $I=1$ проекция M принимает значения $M=1, 0, -1$. Для $I=2$, $M=2, 1, 0, -1, -2$.

Таким образом, система $Na—Ta$ может находиться в восьми различных состояниях с различными J и M. Каждое из состояний описывается своей волновой функцией $\Phi_{j_1 j_2 IM}$, являющейся собственной функцией оператора полного момента количества движения.

Собственные функции оператора полного момента количества движения выражаются через линейную комбинацию произведений собственных функций операторов $\hat{j}_1$ и $\hat{j}_2$ с помощью соотношения [2]

$$\Phi_{j_1 j_2 IM} = \sum_{m_1 m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 \mid IM)\, \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} \qquad (1)$$

$(j_1 j_2 m_1 m_2 \mid IM)$ — коэффициенты Клебша — Жордана находятся по таблицам, а m_1 и m_2 — проекции полных моментов количеств движения j_1 j_2 отдельных атомов. Например:

$$\Phi_{3/2\ 1/2\ 11} = (3/2\ 1/2\ 3/2 — 1/2 \mid 11)\, \psi_{3/2\ 3/2} \psi_{1/2 — 1/2} + (3/2\ 1/2\ 1/2\ 1/2 \mid 11) \times$$

$$\times \psi_{3/2\ 1/2}\ \psi_{1/2\ 1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \psi_{3/2\ 1/2}\, \psi_{1/2\ -1/2} — \frac{1}{2}\, \psi_{3/2\ 1/2}\, \psi_{1/2\ 1/2}\,.$$

В дальнейшем в выражении (1) индексы j_1 и j_2 будем опускать, ради сокращения записи, а частицы будем отличать цифрами 1 и 2 в скобках при волновых функциях ψ. Так $\psi_{m_1}(1)$ является волновой функцией атома Ta, а $\psi_{m_2}(2)$ — атома Na. Таким образом, начальное состояние системы $Na — Ta$ до рассеяния описывается волновой функцией Φ_{IM}.

После рассеяния полный момент системы I и его проекция M остаются теми же, что и до рассеяния, и процесс рассеяния будет характеризоваться лишь амплитудами рассеяния f_1 и f_2

$$\Phi_{IM} \longrightarrow \begin{matrix} f_1 \Phi_{1M} \\ f_2 \Phi_{2M} \end{matrix}. \qquad (2)$$

Проведя обратное к (1) преобразование

$$\psi_{m_1}(1)\, \psi_{m_2}(2) = \sum_{I=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (m_1 m_2 \mid IM)\, \Phi_{IM}$$

и подставляя в него (2) и (1), найдем, например:

$$1.\ \psi_{3/2}(1)\, \psi_{-1/2}(2) \to \left(\tfrac{3}{4} f_1 + \frac{1}{4} f_2\right) \psi_{3/2}(1)\, \psi_{-1/2}(2) +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{3}}{4} f_2 — \frac{\sqrt{3}}{4} f_1\right) \psi_{1/2}(1)\, \psi_{1/2}(2). \qquad (3)$$

Аналогично могут быть найдены:

2. $\psi_{1/2}(1)\, \psi_{1/2}(2)$, 3. $\psi_{1/2}(1)\, \psi_{-1/2}(2)$, 4. $\psi_{-1/2}(1)\, \psi_{1/2}(2)$;
5. $\psi_{-1/2}(1)\, \psi_{-1/2}(2)$; 6. $\psi_{-3/2}(1)\, \psi_{1/2}(2)$; 7. $\psi_{3/2}(1)\, \psi_{1/2}(2)$;
8. $\psi_{-3/2}(1)\, \psi_{-1/2}(2)$.

Из (3) видно, что полное эффективное сечение упругого рассеяния

$$\sigma_1 = \left|\left(\frac{3}{4} f_1 + \frac{1}{4} f_2\right)\right|^2,$$

а сечение с перебросом проекций m_1 и m_2 (неупругое рассеяние)

$$\sigma_1' = \left|\left(\frac{\sqrt{3}}{4} f_2 - \frac{\sqrt{3}}{4} f_1\right)\right|^2.$$

Аналогично находятся $\sigma_2, \ldots, \sigma_8$ и $\sigma_2', \ldots, \sigma_8'$.

Для нахождения численных значений сечений необходимо знать амплитуды рассеяния f_1 и f_2. Однако можно оценить отношения сечений, если предположить, что I $f_1 = f_2$, т. е. вклад в сечение состояний с $I = 1$ и $I = 2$ одинаков. В этом случае для отношений сечений имеем:

$$\sigma_1 : \ldots : \sigma_8 = 1 : \ldots : 1.$$

II. $f_1 \neq 0$, а $f_2 = 0$, т. е. вклад вносит только $I = 1$.

Тогда

$$\sigma_1 : \ldots, \sigma_8 = {}^9/_{16} : {}^1/_{16} : {}^1/_4 : {}^1/_4 : {}^1/_{16} : {}^9/_{16} : 0 : 0,$$

$$\sigma_1' : \ldots, \sigma_8' = {}^3/_{16} : {}^3/_{16} : {}^1/_4 : {}^1/_4 : {}^3/_{16} : {}^3/_{16} : 0 : 0.$$

Если ${}^1/_{16}$ принять за 1, то

$$\sigma_1 : \ldots : \sigma_8 = 9 : 1 : 4 : 4 : 1 : 9 : 0 : 0$$

$$\sigma_1' : \ldots : \sigma_8' = 3 : 3 : 4 : 4 : 3 : 3 : 0 : 0$$

III $f_2 \neq 0$, а $f_1 = 0$ и ${}^1/_{16}$ принять за 1, то

$$\sigma_1 : \ldots : \sigma_8 = 1 : 9 : 4 : 4 : 9 : 1 : 16 : 16$$

$$\sigma_1' : \ldots : \sigma_8' = 3 : 3 : 4 : 4 : 3 : 3 : 0 : 0$$

Мы рассмотрели рассеяние поляризованных атомов *Na* на поляризованных атомах *Ta* (чистые состояния). Аналогично проводится анализ рассеяния с частично поляризованными атомами *Na* и *Ta* (смеси состояний).

Например:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{3/2}(1)\, \psi_{-1/2}(2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{1/2}(1)\, \psi_{1/2}(2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} f_2 - \frac{3-\sqrt{3}}{4} f_1\right) \psi_{3/2}(1)\, \psi_{-1/2}(2) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4} f_2 + \frac{1-\sqrt{3}}{4} f_1\right) \psi_{1/2}(1)\, \psi_{1/2}(2).$$

В этом случае для отношений сечений найдем при тех же предположениях относительно f_1 и f_2

$$\text{I. } \sigma_1 : \ldots : \sigma_8 = 1 : \ldots : 1$$

$$\text{II. } \sigma_1 : \ldots : \sigma_8 = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{16} : \frac{(1-\sqrt{3})^2}{16} : 0 : 0 : \frac{(1-\sqrt{3})^2}{16} :$$

$$: \frac{(3-\sqrt{3})^2}{16} : 0 : 0$$

$$\text{III. } \sigma_1 : \ldots : \sigma_8 = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{16} : \frac{(3-\sqrt{3})^2}{16} : 1 : 1 : \frac{(3+\sqrt{3})^2}{16} :$$

$$: \frac{(1+\sqrt{3})^2}{16} : 1 : 1.$$

Такие же результаты должны получиться, если рассматривать рассеяние атомов *Li*, *K*, *Rb*, *Cs*, *Fr* на атомах *Ta*. Интересно также рассмотреть рассеяние в *P*-состоянии, когда относительный момент сталкивающихся атомов равен 1. Решение задачи в этом случае значительно усложняется.

В заключение следует отметить, что экспериментальная проверка проведенных теоретических расчетов требует проведения опытов с поляризованными пучками атомов. Поскольку методика работы с поляризованными пучками вообще развита довольно хорошо, по-видимому, получение и исследование поляризованных атомных пучков не представляет особых трудностей. Такие опыты должны доставить интересные сведения о взаимодействии атомов.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. **«Квантовая механика»**. Гостехиздат, 1948.
[2]. А. С. Давыдов. **«Теория атомного ядра»**. Физматгиз, 1959.

ИЗОМОРФИЗМ ПОТЕНЦИАЛОВ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

В теории упругих столкновений возникает задача о движении одной частицы с приведенной массой в заданном потенциальном поле. В задаче ищется отклонение Θ частицы от первоначального направления ее движения. Это отклонение связано с полярным углом φ, отсчитываемым от оси симметрии до асимптоты траектории, следующими соотношениями:

$$\Theta = |\,(2n-1)\pi - 2\varphi\,|\,, \qquad \varphi = \frac{(2n-1)\pi \pm \Theta}{2}, \tag{1}$$

если φ лежит в соответствующей области:

$$(n-1)\pi \leqslant \varphi < n\pi, \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{2}$$

Угол φ находится с помощью уравнений движения и равен (в нерелятивистском случае) [1]

$$\varphi = \int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\left\{\frac{1}{\rho^2} - \frac{U(r)}{E\rho^2} - \frac{1}{r^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} dr \tag{3}$$

Здесь E — полная энергия,
ρ — прицельный параметр,
r_0 — расстояние наибольшего сближения.

Формула (3) с помощью (1) дает функциональную зависимость $\rho_n(\Theta)$, что позволяет определить искомое дифференциальное сечение

$$d\sigma = \sum_n \left|\frac{d\rho_n^2}{d\Theta}\right| d\Theta. \tag{4}$$

В связи с этим возникает следующая задача. Если на какое-либо тело вращения параллельно оси вращения падает поток частиц, то в результате отражения этих частиц от различных то-

чек поверхности мы получим некоторое распределение рассеянных частиц, не зависящее от азимутального угла. При этом можно подобрать такую форму поверхности, что рассеяние на ней будет в точности совпадать с рассеянием на заданном потенциале.

Можно сказать, что такая поверхность в отношении рассеяния моделирует потенциал $U(r)$. Однако рассеяние на потенциальном поле зависит еще от энергии рассеиваемых частиц, в то время как рассеяние на упругой поверхности от энергии частиц не зависит. Поэтому для определения моделирующей поверхности необходимо указать полную энергию E налетающих частиц. С изменением E моделирующая поверхность непрерывно деформируется, образуя некоторое семейство поверхностей. Таким образом, мы приходим к выводу, что существует изоморфное соответствие между множеством потенциалов $U(r)$ и множеством семейств моделирующих поверхностей. Отсюда возникает задача найти это соответствие.

Для этого рассмотрим сначала столкновение частицы с заданной поверхностью. Пусть xoy— плоскость, проходящая через ось ox симметрии этой поверхности. Пересечение ее с поверхностью образует кривую $x=x(y)$, причем, очевидно $\rho = |y|$. (5) Применяя закон упругого удара, имеем

$$\Theta = \begin{cases} 2\alpha, \text{ если } 0 \leqslant \alpha \leq \frac{\pi}{2}, & \alpha = \frac{\Theta}{2} \\ 2(\pi - \alpha), \text{ если } \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi, & \alpha = \pi - \frac{\Theta}{2}, \end{cases} \tag{6}$$

где

α — угол между осью OX и касательной к кривой в точке y.

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = K = \operatorname{tg}\alpha = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}, \text{ если } k > 0, \\ -\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}, \text{ если } k < 0, \ \Theta = |\ 2arc\operatorname{ctg} K\ | \end{cases} \tag{7}$$

Зная уравнения кривой $x = x(y)$, можно найти функцию $k(y)$, а значит, и функцию $y^2(k)$. Отсюда находится дифференциальное сечение

$$d\sigma = \pi \left|\frac{dy^2}{d\Theta}\right| d\Theta = \pi \left|\frac{dy^2}{dk}\right| \cdot \left|\frac{dk}{d\Theta}\right| d\Theta. \tag{8}$$

Таким образом, угловое распределение распадается на два сомножителя: универсальное выражение $\left|\frac{dk}{d\Theta}\right|$, равное, согласно (7), $\frac{1}{2}\sec^2\frac{\Theta}{2}$, и выражение $\left|\frac{dy^2}{dk}\right|$, зависящее от вида поверхности.

В качестве примера рассмотрим рассеяние на параболоиде вращения

$$x = \frac{E}{\alpha} y^2, \quad E > 0. \tag{9}$$

Имеем: $$\frac{1}{k} = \frac{dx}{dy} = \frac{2E}{\alpha} y, \quad y^2 = \frac{\alpha^2}{4E^2 k^2} \tag{10}$$

Используя (8) и (7), получим

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2 \cos\frac{\Theta}{2}}{4E^2 \sin^3\frac{\Theta}{2}} d\Theta = \left(\frac{4\pi}{4E}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\Theta}{2}}, \tag{11}$$

где

$d\Omega$ — элемент телесного угла.

Мы получили формулу Резерфорда для рассеяния в кулоновском поле. Согласно (11), рассеяние не зависит от знака α, т. е. от того, выпуклой или вогнутой стороной обращен параболоид к потоку частиц. Конечно, в реальном эксперименте рассеяние от вогнутого параболоида вообще не дает расходящегося пучка, а приводит к обращению первоначального потока. С первого взгляда это противоречит формуле (11), дающей для вогнутого параболоида такое же рассеяние, как и для выпуклого. Однако на самом деле противоречия нет, т. к. на вогнутом параболоиде каждая частица рассеивается дважды и обращение пучка происходит после двукратного рассеяния. Формула же (11) описывает результат однократного рассеяния, т. е. распределение по углам, возникающее после первого и до второго соударения частиц с поверхностью.

Отсюда вытекает следующее: ввиду тождественности обращенного пучка первичному, плотность частиц во всех точках его сечения должна быть одинакова. Но т. к. распределение плотности в пучке однозначно связано с угловым распределением, то всякое распределение, отличающееся от (11), дает обращенный пучок с неоднородной плотностью по сечению. Поэтому применяемый в технике метод получения пучков света с помощью источника, помещенного в фокусе параболоида, дает пучок с неоднородной плотностью, если излучение источника по углам отлично от резерфордовского (11). Разумеется, аналогия между пучком частиц и световым потоком ограничена областью геометрической оптики.

Найдем соответствие между центральными полями и семействами поверхностей вращения, дающими одинаковое угловое распределение. Фактически для решения этой задачи мы предъявим более жесткое требование: поверхность $x = x(y)$ должна давать ту же зависимость $\Theta(\rho)$, что и данное поле. Приравнивая (1) и (7), получаем:

$$\operatorname{arc\,tg} K = (2n-1)\frac{\pi}{2} - \varphi \tag{12}$$

ли

$$K = \operatorname{ctg}\varphi. \tag{13}$$

Подстановка вместо φ его значения (3) дает:

$$K = \operatorname{ctg}\int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{U}{Ey^2} - \frac{1}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \tag{14}$$

Полученное соотношение задает в общей форме изоморфное соответствие между потенциалами и моделирующими поверхностями. Зная $K(y)$, мы легко восстанавливаем уравнение кривой

$$dx = \frac{dy}{K(y)}, \qquad x = \int_0^y \frac{dy}{K(y)}. \tag{15}$$

Обратная задача: зная рассеивающую поверхность, найти эквивалентный ей потенциал, — приводит к интегральному уравнению Абеля и решается методами, рассмотренными в [2].

Рассмотрим примеры. Найти семейство поверхностей, моделирующих рассеяние в кулоновском поле $\frac{\alpha}{r}$. Для этого поля имеем:

$$\varphi = \int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{\alpha}{Ey^2}\,\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr, \tag{16}$$

где

r_0 — положительный корень подкоренного выражения в интеграле. В результате интеграции получаем

$$\varphi = \operatorname{arc\,ctg}\frac{\alpha}{2Ey}. \tag{17}$$

Поэтому (14) в этом случае дает

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{2Ey}, \tag{18}$$

откуда

$$x = \frac{E}{\alpha}\,y^2. \tag{19}$$

Таким образом, кулоновское поле отображается на семейство параболоида вращения. Этот результат находится в полном соответствии с формулой (11), дающей для параболоида точное кулоновское рассеяние.

Другой пример: найти семейство, моделирующее поле притяжения $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$.

В этом поле точка поворота r_0 не существует при значениях параметра y, лежащих в области

$$-\sqrt{\frac{\alpha}{E}} < y < \sqrt{\frac{\alpha}{E}}. \tag{20}$$

Для остальных значений y формула (13) дает

$$K = \operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{Ey^2}}}. \tag{21}$$

При минимальном допустимом значении $y = \sqrt{\frac{\alpha}{E}}$ мы получаем $K = \operatorname{ctg}\infty$, т. е. в этой точке кривая не имеет производной, что должно отвечать неопределенному отклонению Θ. При дальнейшем возрастании y во всей области, где $\left(1-\frac{\alpha}{Ey^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ остается больше единицы, величина K претерпевает многократные резкие изменения во всей области своего определения, т. е. от $-\infty$ до $+\infty$, проходя всякий раз через нулевое значение. Наконец, при $y \to \infty$ мы имеем $K \to 0$. Кроме того, надо учесть, что при переходе через нулевое значение (при $y \neq \infty$) K меняет знак. В то же время эта точка не может быть экстремумом функции $y(x)$, ибо x однозначно зависит от y. Поэтому осевое сечение эквивалентной поверхности имеет вид, изображенный на рисунке, где ось Z — ось поверхности, ρ — прицельный параметр. Рассмотрим теперь оставшуюся область (21). Поскольку точки поворота здесь не существует (она совпадает с силовым центром), полярный угол φ определяется интегралом (3) с нулевым нижним пределом. Легко убедиться, что этот интеграл расходится всюду в области (20). Желая построить моделирующую поверхность в этой области, мы получим из соотношения изоморфизма:

$$K = \operatorname{ctg}\infty = ? \tag{22}$$

Это интересное соотношение указывает, что моделирующая поверхность в области (20) нигде не имеет производной! Рассеяние на такой поверхности неопределенное: хотя начальное условие задано, все-таки невозможно предсказать отклонение частицы после столкновения. Такой результат естествен. Причинность, однозначно связывающая состояния системы до и после определенного момента, действует в областях с однозначно определенными силами, действующими на систему. При прохождении же через особую точку возникают бесконечно большие и неопределенные по направлению силы. Они разрывают однозначную связь между предшествующими и последующими состояниями частицы вследствие неопределенности ее поведения в момент прохождения. Обычно такие случаи обходят стороной, исключая

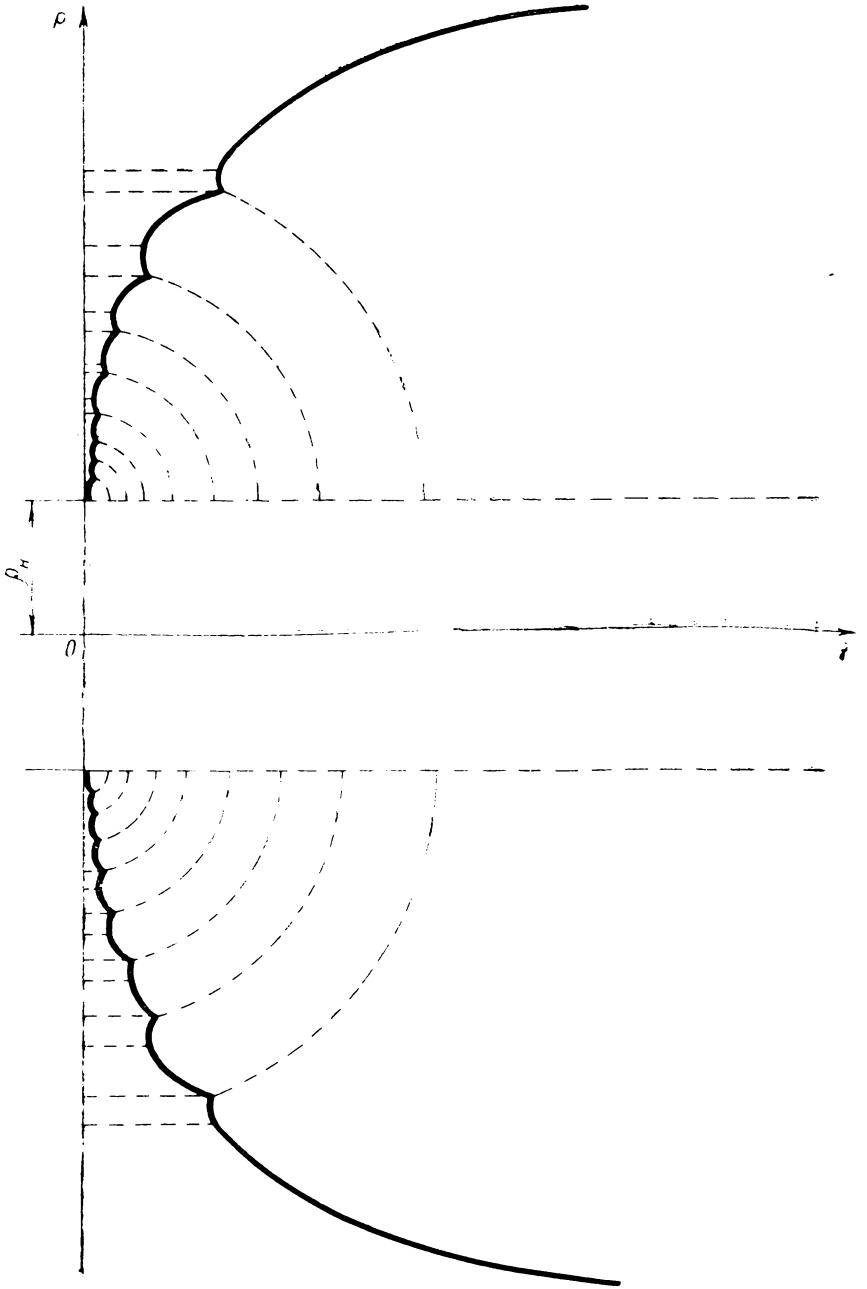

Рис. 3.

«особые» точки поля. Но если, согласно теории, через такую точку проходит непрерывное множество траекторий, то ее нельзя игнорировать. Разумеется, получаемая при этом неоднозначность имеет не физическую, а математическую природу, в смысле неоднозначности решения задачи с точно поставленными идеальными условиями. В самой природе не существует «силовых центров» с бесконечными потенциалами, как не существует точек, движущихся по идеальным геометрическим линиям. Все эти понятия — суть абстракции, применимые в ограниченных пределах. Всякие реальные объекты имеют конечные размеры и конечную силу взаимодействия. Поэтому в реальном эксперименте все частицы, летящие в критической зоне (20), попросту столкнутся с частицей-мишенью, и угол этого столкновения определяется вполне однозначно, если известны геометрические размеры мишени. Очевидно, что развитые методы можно применить для моделирования неупругого рассеивания с помощью неупругих поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Л. Ландау и Е. Лифшиц. «Механика». М. 1958.
[2]. О. Б. Фирсов. ЖЭТФ, 24, 279. (1953).

К ЗАДАЧЕ ЭЙНШТЕЙНА-СМОЛУХОВСКОГО

1. Во многих явлениях процесс упругого рассеяния можно имитировать столкновением упругих шаров. Такая приближенная имитация применяется в многочисленных задачах молекулярной физики. Рассеивающий центр в таком случае рассматривается как упругий шар с эффективным радиусом a. Легко показать, что при этом:

$$d\sigma = \frac{1}{2}\pi a^2 \sin\Theta d\Theta = \frac{1}{4}a^2 d\Omega, \quad \sigma = \pi a^2. \tag{1}$$

Эта формула позволяет сравнительно просто рассчитать процесс последовательных столкновений частицы с совокупностью одинаковых рассеивателей. Поскольку при каждом столкновении частица теряет энергию, необходимо определить, какая доля первоначальной энергии останется у частицы после n столкновений. С этой целью выразим эффективное сечение как функцию энергии ε, теряемой рассеиваемой частицей [1]:

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{\varepsilon_{\text{мах}}}\, d\varepsilon. \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon_{\text{мах}}$ — максимальная энергия (передается от одного шара к другому при лобовом столкновении):

$$\varepsilon_{\text{мах}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} E, \tag{3}$$

m_1 и m_2 — массы шаров.

Из (2) следует, что вероятность передачи энергии от ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ не зависит от ε и равна:

$$dW = \frac{d\sigma(\varepsilon)}{\sigma} = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\text{мах}}}. \tag{4}$$

В среднем при каждом столкновении теряется энергия

$$\overline{\varepsilon} = \int_0^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon dw(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\max}. \tag{5}$$

Для среднего остатка имеем:

$$E_1 = E - \frac{1}{2}\varepsilon_{\max} = \left\{1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\right\}E = \left(1 - 2\frac{m}{M}\right)E, \tag{6}$$

где положено

$$m \equiv \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}, \quad M = m_1 + m_2. \tag{7}$$

Таким образом, после n-го столкновения у частицы останется энергия

$$E_n = \left(1 - 2\frac{m}{N}\right)^n E. \tag{8}$$

При $n \to \infty$ $E_n \to 0$, т. е. частица потеряет всю энергию только после бесконечного числа столкновений. Так как после каждого столкновения скорость частицы уменьшается, то время ее движения до полной остановки также бесконечно (другими словами, остановка не наступит). Сказанное справедливо лишь при условии, что можно ввести единую лабораторную систему для всех рассеивателей, т. е. что все рассеиватели до столкновения покоятся. Это значит, что «среда», образованная совокупностью таких рассеивателей, находится при температуре абсолютного нуля. В реальном случае все рассеиватели находятся в беспорядочном тепловом движении, поэтому, начиная с некоторого момента, рассеиваемая частица перестает терять энергию. Это наступает тогда, когда ее средняя энергия становится равной средней энергии движения частиц среды. После этого момента вся совокупность столкновений будет представлять обычное броуновское движение частицы, взвешенной в среде, с которой она находится в тепловом равновесии. Энергия такого движения

$$\overline{E} = \frac{3}{2}KT \tag{9}$$

представляет остаток первоначальной энергии частицы. Следовательно, для этого случая

$$E_n = \left(1 - 2\frac{m}{M}\right)^n E = \frac{3}{2}KT. \tag{10}$$

2. Теперь рассмотрим, после какого числа n соударений у частицы останется энергия E_n, если первоначальный запас ее был E? Имеем из (8)

$$n = \frac{ln\frac{E_n}{E}}{ln\left(1 - 2\frac{m}{M}\right)}. \tag{11}$$

При $E_n = \frac{3}{2} KT$ можно считать, что процесс передачи энергии от быстро двигавшейся частицы к окружающей среде уже закончен. Это произойдет после числа столкновений, равного

$$n = \frac{\ln \frac{3KT}{2E}}{\ln\left(1-2\frac{m}{M}\right)}. \tag{12}$$

Вообще говоря, эти формулы неприменимы к тепловому движению, ибо выведены для частиц, покоящихся перед столкновением. Уже само утверждение, что с некоторого момента отдача энергии во внешнюю среду прекращается, противоречит формуле (8), гласящей, что отдача энергии никогда не прекратится. Следовательно, для движущихся рассеивателей имеет место другая формула, сводящаяся к (8) при $T \to 0$. Однако в тех случаях, когда энергия налетающей частицы значительно превосходит среднюю энергию рассеивателей, последние приближенно можно считать покоящимися и применять соотношение (8). Следовательно, все дальнейшие выводы, полученные с помощью (8), будут справедливы при условии

$$E_n \gg KT. \tag{13}$$

3. Рассмотрим теперь, как меняется со временем остаточная энергия E_n. Для этого обозначим через l среднюю длину свободного пробега частицы в данной среде. Тогда промежуток времени между n-м и $(n+1)$-м столкновениями будет

$$\Delta t_n \equiv t_{n+1} - t_n = \frac{l}{V_n}, \tag{14}$$

где V_n — скорость частицы после n-го столкновения.
Время начинаем отсчитывать с момента первого столкновения, так что $t_1 = 0$.
Отсюда

$$t_n = \sum_{j=1}^{n-1} \Delta t_j = l \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{V_j}. \tag{15}$$

Но

$$V_j = \sqrt{\frac{2}{m_1} E_j} = \sqrt{\frac{2}{m_1} E\left(1-2\frac{m}{M}\right)^j} =$$

$$= V\left(1-2\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}j} = V\mu^{-j}, \tag{16}$$

где V — первоначальная скорость частицы,

а $$\mu \equiv \left(1-2\frac{m}{M}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Поэтому (15) принимает вид

$$t_n = \frac{l}{V}\sum_{j=1}^{n-1}\mu^j = \frac{l}{V}\,\frac{\mu(\mu^{n-1}-1)}{\mu-1}. \qquad (18)$$

Отсюда находим

$$n-1 = \frac{ln\left(1+\frac{\mu-1}{\mu}\,\frac{v}{l}\,t_n\right)}{ln\mu}. \qquad (19)$$

Меняя теперь в (11) n на $n-1$ и сравнивая (19), получаем

$$ln\,\frac{E_{n-1}}{E} = ln\left(1+\frac{\mu-1}{\mu}\,\frac{v}{l}\,t_n\right)^{-2}. \qquad (20)$$

Наконец, полагая

$$\frac{\mu-1}{\mu}\,\frac{v}{l} = \frac{\mu-1}{\mu l}\sqrt{\frac{2E}{m_1}} \equiv \beta \qquad (21)$$

находим из (20)

$$E_{n-1} = \frac{E}{(1+\beta t_n)^2} \qquad (22)$$

Полученное выражение является ступенчатой функцией переменной t, причем моменты столкновений t_n — суть точки разрыва этой функции. Однако практически благодаря огромной частоте столкновений эту функцию можно считать непрерывной. Найденный результат оказывается полезным в теории диффузии.

4. Одна из задач этой теории формулируется следующим образом: необходимо определить характер блуждания броуновской частицы под влиянием столкновений с окружающими молекулами. Впервые эта задача была решена Эйнштейном и Смолуховским, но здесь мы применим для ее решения метод Ланжевена [2], явно использующий тот факт, что сила, действующая на броуновскую частицу в каждый данный момент, слагается из двух частей. Первая часть F_1 вызвана перевесом в числе ударов молекул с какой-либо одной стороны; она обусловлена хаотичностью движения молекул и имеется даже в том случае, когда частица покоится. Вторая часть F_2 возникает при движении частицы и представляет собой силу сопротивления, которое испытывает движущаяся частица в вязкой жидкости

$$F_2 = -6\pi a\eta\frac{dx}{dt}, \qquad (23)$$

где η — коэффициент вязкости.

В результате уравнение движения частицы будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1 - 6\pi a\eta\frac{dx}{dt}. \qquad (24)$$

Умножая (24) на x, после небольшого преобразования и усреднения по множеству независимых частиц получим

$$\frac{1}{2}\,m\frac{d^2}{dt^2}\overline{x^2} + 3\pi a\eta\frac{d}{dt}\overline{x^2} = m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + \overline{F_1 x} \qquad (25)$$

Ввиду хаотичности F_1 величина $\overline{F_1 x} = 0$. Далее, очевидно, $m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = kT$. Поэтому, полагая $\frac{d}{dt}\overline{x^2} = z$, приведем (25) к виду

$$\frac{1}{2} m \frac{dz}{dt} + 3\pi a \eta_1 z = kT. \tag{26}$$

Общее решение этого уравнения есть

$$Z = Z_1 + Z_2 = \frac{kT}{3\pi a \eta_1} + Z_2(0) e^{-\frac{6\pi a \eta_1}{m} t} \tag{27}$$

При длительном наблюдении, когда $t \to \infty$, второй член исчезает, и мы получим

$$Z = \frac{d}{dt}\overline{x^2} = \frac{kT}{3\pi a \eta_1}. \tag{28}$$

Отсюда при условии $\overline{x^2} \mid_{t=0} = 0$ вытекает

$$\overline{x^2} = \frac{kT}{3\pi a \eta_1} t. \tag{29}$$

5. Этот же результат можно получить с помощью вириальной теоремы, согласно которой средняя кинетическая энергия поступательного движения частицы равна взятому с обратным знаком вириалу действующих на нее сил

$$\overline{E_x} = -\frac{1}{2}\overline{F_x \cdot x} \tag{30}$$

Силу F_x по-прежнему разбиваем на две части F_1 и F_2. Заменяя $\overline{F_x}$ через $\frac{1}{2} kT$, учитывая хаотичность F_1 и используя (23), имеем:

$$kT = \overline{F_2 x} = 6\pi a \eta_1 \overline{\frac{dx}{dt} \cdot x} = 3\pi a \eta_1 \frac{\overline{dx^2}}{dt}. \tag{31}$$

Легко показать, что при $t \to \infty$, когда только и применима теорема вириала, выполняется равенство

$$\frac{\overline{dx^2}}{dt} = \frac{d\overline{x^2}}{dt}. \tag{32}$$

Поэтому из (31) сразу получается результат (29). Заметим, что в методе Ланжевена величина $\overline{x^2(t)}$ означает среднее арифметическое $\overline{x^2(t)}$ для многих частиц, **взятое в один момент** t. В методе же вириала величина $x^2(t)$ есть среднее арифметическое от $x^2(t)$ для **одной** частицы, но взятое по всем моментам времени от 0 до t. Короче: в первом случае мы имеем среднее по совокупности, во втором — среднее по времени. Общим же в обоих методах является то, что оба они существенно используют условие $t \to \infty$. Следовательно, формула (29), полученная этими ме-

тодами, правильно описывает зависимость от времени величины $\overline{x^2}$ лишь для очень больших времен t. По сути дела, она дает лишь асимптотический вид функции $\overline{x^2(t)}$ при $t \to \infty$.

6. Но помимо указанного, имеется еще одно ограничение, а именно: полагая $m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = kT$, мы тем самым ограничиваемся только такими частицами, которые находятся в тепловом равновесии с окружающей средой. Однако возможны случаи, когда частицы «впрыскиваются» в систему с энергией, значительно превышающей энергию теплового движения молекул, и нас интересует характер «блуждания» такой частицы именно до установления ее равновесия с молекулами среды. В этом случае мы должны вернуться к уравнению

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2}\overline{x^2} + 3\pi a \eta \frac{d}{dt}\overline{x^2} = m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \qquad (25')$$

и считать, что правая часть его $m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = 2E(t)$ есть функция времени, поскольку со временем средняя энергия частицы уменьшается. Полагая снова $\frac{d}{dt}\overline{x^2} = Z$, мы приходим к уравнению Бернулли

$$\frac{dz}{dt} + \frac{6\pi a \eta}{m} z = \frac{4}{m} E(t), \qquad (33)$$

общее решение которого есть

$$Z(t) = e^{-\frac{6\pi a \eta}{m} t} \left\{ Z(0) + \int_0^t \frac{4}{m} E(t) e^{\frac{6\pi a \eta}{m} t'} dt' \right\} \qquad (34)$$

для $\overline{x^2}$ отсюда находим

$$\overline{x^2}(t) = \int_0^t e^{-\frac{6\pi a \eta}{m} t'} \left\{ \left(\frac{d}{dt}\overline{x^2}\right)_{t=0} + \frac{4}{m} \int_0^{t'} E(t'') e^{\frac{6\pi a \eta}{m} t''} dt'' \right\} dt'. \qquad (35)$$

Для конкретных выводов необходимо знать ход функции $E(t)$. Этот ход различен для разных механизмов столкновений. В частности, для упругих соударений мы можем использовать результат (22), считая в нем функцию $E(t)$ непрерывной. Тогда окончательно получим выражение:

$$\overline{X^2}(t) = \int_0^t e^{-\frac{6\pi a \eta}{m} t'} \cdot \left\{ \left(\frac{d\overline{x^2}}{dt}\right)_{t=0} + \frac{4E}{m} \int_0^{t'} \frac{e^{\frac{6\pi a \eta}{m} t''}}{(1+\beta t'')^2} dt'' \right\} dt' \qquad (36)$$

которое правильно описывает ход кривой $\overline{x^2}(t)$ при любых t, а значит и задолго до установления теплового равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Ландау и Е. Лифшиц. «Механика», М., 1958.
[2]. А. К. Тимирязев. «Кинетическая теория материи», М., 1956.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТОВ СТОЛКНОВЕНИЙ АТОМОВ

Для определения эффективного сечения неупругого или упругого рассеяния атом-атомных или ион-атомных столкновений в рамках обычной теории рассеяния необходимо знать волновые функции начального и конечного состояний системы и потенциал взаимодействия. Для атомов или ионов с большим числом электронов определение этих величин связано с большими математическими трудностями, т. к. необходимо решать уравнения Хартри-Фока или Томаса-Ферми.

Можно попытаться рассматривать столкновения атом-атом, атом-ион с помощью общей теории ядерных реакций [1].

Будем считать, что взаимодействие атомов происходит в области, радиус которой $R=R_1+R_2$, где R_1 и R_2 радиусы рассеивающихся атомов. Во внешней области ($r>R$) потенциал взаимодействия равен нулю, и волновой вектор налетающей частицы равен $K=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$. Во внутренней области ($r<R$) волновой вектор частицы равен $K=\frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}$,

где V — потенциал взаимодействия,

E — энергия налетающей частицы,

m — приведенная масса. (Если потенциал взаимодействия неизвестен, то порядок величины его может быть оценен по величине химической связи).

Согласно теории ядерных реакций, эффективное сечение неупругого рассеяния выражается формулой

$$\sigma=\pi\lambda^2\sum_{0}^{l}(2l+1)\,T_e\,, \qquad (1)$$

где

$$T_e = \frac{4xX}{X^2 + (2xX + x^2V_e')V_e}; \quad x = K_0R, \quad X = KR, \quad \lambda = \frac{1}{K_0}$$

$$V_e = [G_e^2(K_0R) + F_e^2(K_0R)]^{-1},$$

$$V_e' = \frac{1}{K_0^2}\left[\left(\frac{dG_e(K_0r)}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dF_e(K_0r)}{dr}\right)^2\right]_{r=R}$$

F_e и G_e выражается через функции Бесселя и Неймана.

Для случая ион-ионных и ион-атомных столкновений необходимо учитывать кулоновское взаимодействие. В этом случае функции зависят не только от K_0R, но и от параметров, характеризующих роль кулоновских эффектов.

Определим эффективное сечение рассеяния (неупругого) молекулы водорода на ионе водорода без кулоновского взаимодействия, которое обычными методами получено в работе [2] для реакции

$$H_2^+ + H_2 \longrightarrow H_3^+ + H.$$

Областью действия потенциала взаимодействия $V = -\frac{\alpha b^3 e^2}{2r^4}$ является сфера радиуса $R = 5b$, где b — боровский радиус.

Полагая энергию относительного движения сталкивающихся частиц равной $E = 0{,}1$ *ев*, находим значения волновых векторов внутри и вне области взаимодействия. Простой расчет показывает, что для определения полного эффективного сечения неупругого рассеяния (сечения реакции) необходимо учесть 15 парциальных волн.

Проводя расчет по формуле (1), получили значение $\sigma = 3{,}04 \cdot 10^{-15}$ *см*^{2}, а для $\sigma V = 1{,}9 \cdot 10^{-9} \frac{см^3}{сек}$, что по порядку величины хорошо согласуется с результатом вышеуказанной работы.

Угловое распределение участвующих в реакции частиц дается выражением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = R^2 \left| \frac{I_1\left(\frac{R}{\lambda}\Theta\right)}{\Theta} \right|^2. \qquad (2)$$

Разлагая функцию Бесселя в ряд при малых углах $\frac{R}{\lambda}\Theta < 1$, получили изотропное угловое распределение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^4}{4\lambda^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2 \qquad (3)$$

При возрастании углов до значений, лежащих в интервале $1 \gg \Theta \gg \frac{\lambda}{R}$ для Бесселевой функции можно написать асимптотическое выражение

$$I_1\left(\frac{R}{\lambda}\Theta\right)=\sqrt{\frac{2\lambda}{R\,\pi\Theta}}\sin\left(\frac{R}{\lambda}\Theta-\frac{\pi}{4}\right),$$

тогда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{2R\lambda}{\pi\Theta^3}\sin^2\left(\frac{R}{\lambda}\Theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2.98\ 10^{-17}}{\Theta^3}\sin^2\left(11{,}5\,\Theta-\frac{\pi}{3}\right)\text{ см}^2 \quad (4)$$

Как видно из формулы (4), в этой области углов эффективное сечение, осциллируя, быстро уменьшается с ростом Θ. Эффективное сечение имеет резкий максимум для рассеяния под углом $\Theta\approx 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Д. Блатт и В. Вайскопф. **«Теоретическая ядерная физика»**. Из-во ИЛ, 1954.

[2]. О. Фирсов. **ЖЭТФ 42**, 1307 (1962).

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА К РАСЧЕТУ СОУДАРЕНИЙ АТОМОВ

Как известно, оптическая модель возникла при рассмотрении неупругих столкновений нуклонов с ядрами. Взаимодействие нуклона с ядром относится к задаче многих тел с сильным взаимодействием, которая ни в классической, ни в квантовой механике не решается точно. Существующие приближенные методы решения подобных задач основаны на применении теории возмущений, которая в случае ядерных взаимодействий неприменима из-за большой величины константы взаимодействия, ввиду чего приходится использовать различные модельные представления о ядре, в частности, оптическую модель (1).

Ядро рассматривается как однородная среда с комплексным показателем преломления. Коэффициент поглощения можно ввести, предположив, что потенциал является комплексным

$$V = V_0 + iW, \tag{1}$$

W ответственно за неупругие процессы (поглощение). Эффективное сечение неупругого рассеяния в рамках оптической модели выражается формулой

$$\sigma = 2\pi \int_0^R \left(1 - e^{-\varkappa x_0}\right) r dr, \tag{2}$$

где

$$\varkappa = \frac{2mW}{\pi} \left[2m\left(E - V\right)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$x_0 = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ — путь, проходимый частицей в ядре;

R — радиус мишени. В случае прямоугольной потенциальной ямы формула (2) примет вид

$$\sigma = \pi R^2 \left[1 + \frac{l^{-2\varkappa R}}{\varkappa R} + \frac{1 - e^{-2\varkappa R}}{(2\varkappa R)^2}\right], \tag{3}$$

Поскольку при рассмотрении рассеяния атома на атоме или иона на атоме также возникают трудности с определением потенциала взаимодействия, можно исследовать возможность применения оптической модели в этих случаях.

Для простоты рассмотрим неупругое рассеяние электронов на атомах гелия. Считаем, что мнимая часть потенциала $W=\xi(F)V_0$, а действительная часть $V_0=10$ *ев* (выбор величины V_0 сделан из учета порядка величины энергии связи электрона в атоме гелия) и, полагая $\xi(E)=60\frac{V_0}{E}$, получим по формуле (3) следующие значения для эффективных сечений неупругого рассеяния:

E — энергия налетающего электрона	$\sigma(\pi a_0^2)$ эксп. [2]	$\sigma(\pi a_0^2)$ полученное
100	0,163	0,163
200	0,108	0,100
400	0,071	0,084

Можно считать, что действительная часть потенциала не зависит от r и равна $V_0=10$ *ев*, а мнимая часть потенциала есть экранированное кулоновское взаимодействие $W=\eta_1\frac{Ze^2}{r}$. Тогда из формулы (2) получим

$$\sigma=\pi R^2\left[2b\left(\operatorname{Sin} b\operatorname{Ci} b-\operatorname{Cos} b\operatorname{Si} b+\frac{\pi}{2}\operatorname{Cos} b\right)-1\right]\ldots \qquad (3)$$

$$b=\frac{4m\eta_1}{\hbar}Ze^2\left[2m(E-V)\right]^{-1/2}.$$

Считая $\eta_1=0,7$ и используя формулу (3), получим следующие значения эффективных сечений рассеяния электронов на гелии

E	$\sigma(\pi a_0^2)$ полученное
100	0,161
200	0,115
400	0,085

Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными значениями по порядку величин [2].

Более тщательный подбор параметров $\xi(E)$ и η может дать совпадение экспериментальных и теоретических результатов. Следовательно, можно надеяться, что оптическая модель применима к рассмотрению столкновений атомов.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Р. Э. Немировский. **«Современные модели атомного ядра».** М., Атомиздат, 1960.

[2]. Н. Мотт и Г. Месси. **«Теория атомных столкновений».** Из-во иностранной литературы. 1951.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НАСЫЩЕННОГО ПАРА ТВЕРДОГО КАЛЬЦИЯ ВЕСОВЫМ МЕТОДОМ

Имеющиеся в литературе данные по давлению пара твердого кальция для области температур 500—700°С сильно отличаются друг от друга [1—7]. По абсолютным значениям давления пара твердого кальция хорошее совпадение у разных авторов наблюдается только для области 580—620°С. Для других же температур расхождение доходит до 50%, хотя точность, достигаемая в большинстве работ при измерении давления пара, составляет 5÷15%. Особенно очевидным становится расхождение при рассмотрении температурной зависимости давления пара твердого кальция. Если из работ [1, 5—6] следует, что теплота сублимации твердого кальция для области 500—700°С составляет примерно 45,5 ккал/г.-ат, то по данным [3, 7] эта величина едва достигает 40 ккал/г.-ат. Согласно же работе [4] $L_{Ca} = 42{,}5$ ккал/г.-ат. Критический анализ ранних работ достаточно полно разобран в монографии Ан. Н. Несмеянова [8]. Менее критически автор монографии подошел к более поздним работам Дугласа и Томлина [5, 6]. Вызывает серьезные возражения использование Томлиным [5] напуска азота в вакуумную систему при смене дисков-приемников, так как кальций легко вступает с ним во взаимодействие уже при комнатных температурах с образованием Ca_3N_2. Поверхностная пленка азида *Ca* будет искажать результаты измерения. Дуглас [6] в качестве приемника паров кальция использовал стеклянные диски при комнатной температуре, считая, что коэффициент конденсации для *Ca* в этих условиях больше 90%. Согласиться с этим допущением без экспериментальной его проверки трудно. Вызывает возражение и использование в работах [5, 6] в качестве материала камеры никеля и малоуглеродистой стали из-за наличия взаимодействия с ними *Ca* [9].

Наиболее надежны данные работы [3], где измерения проводились в атмосфере аргона, а камера была целиком сделана из молибдена. Однако эта работа остается пока что в одиночестве. В связи с вышеизложенным было решено еще раз тщательно измерить давление пара твердого кальция.

Экспериментальная часть.

Для измерения давления пара твердого кальция был применен интегральный вариант эффузионного метода Кнудсена [8]. Давление пара рассчитывалось по формуле

$$P(\text{мм рт. ст.}) = \frac{17{,}14\, m}{S\tau K}\sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

где m — масса проэффундировавшего Ca через отверстие S за время τ при температуре T;

μ — молекулярный вес Ca, принимавшийся равным его атомному весу;

K — коэффициент Клаузинга [8].

В качестве исследуемого вещества брался металлический Ca с чистотой порядка 99,9%, дважды очищенный перегонкой в вакууме. По данным спектрального анализа основной примесью был магний в количестве $\sim 0{,}08\%$. Мелко нарезанные кусочки Ca очищались с поверхности ножом и промывались в эфире, а затем помещались в чашечку, сделанную из Mo, которая закрывалась сверху молибденовой фольгой с толщиной порядка $0{,}04 \div 0{,}02$ мм. В фольге предварительно просверливалось круглое отверстие с диаметром порядка 0,4 мм. Размеры отверстия замерялись на микроскопе МИР-12 и МИМ-7 с точностью ± 5 μ. Толщина фольги измерялась на вертикальном компараторе ИЗБ-2 с точностью 1μ. Таким образом, коэффициент Клаузинга можно было рассчитать с точностью не хуже, чем 0,5%, а площадь отверстия с точностью $\sim 2\%$. Общая навеска Ca составляла $80 \div 100$ мг. Герметизация чашечки по краям молибденовой фольгой достигалась помещением ее во внешнюю завинчивающуюся камеру (рис. 1), сделанную из малоуглеродистой стали. Таким образом, Ca мог соприкасаться только с молибденом, что устраняло влияние взаимодействия вещества камеры с ним на величину давления пара. Отношение площади отверстия к площади поверхности испарения Ca в камере $\leqslant \frac{1}{180}$, а чашечка заполнялась кусочками Ca почти полностью, что обеспечивало наличие внутри камеры насыщенных паров кальция.

Камера располагалась на кварцевой подставке *4* (рис. 1) и нагревалась электрической печью сопротивления, помещен-

ной внутри вакуумного прибора (рис. 2), сделанного из молибденового стекла. Печь наматывалась проволокой «сплав 2» диаметром 0,3 мм на кварцевой трубке *5*. Обмотка на концах печи делалась чаще, а в середине реже. Это обеспечило, во-первых, получение более высокой температуры крышки камеры по отношению к температуре самого исследуемого вещества, необходимой для устранения забивания отверстия кальцием в процессе опыта. Правда, полностью устранить конденсацию паров *Ca* вблизи отверстия не удалось. Во-вторых, это обеспечило минимальный отток тепла по термопаре, что необходимо для правильного замера температуры. Снаружи обмотка печи обмазывалась алундом с последующей прокалкой его сначала на воздухе, а затем в вакууме для дегазации.

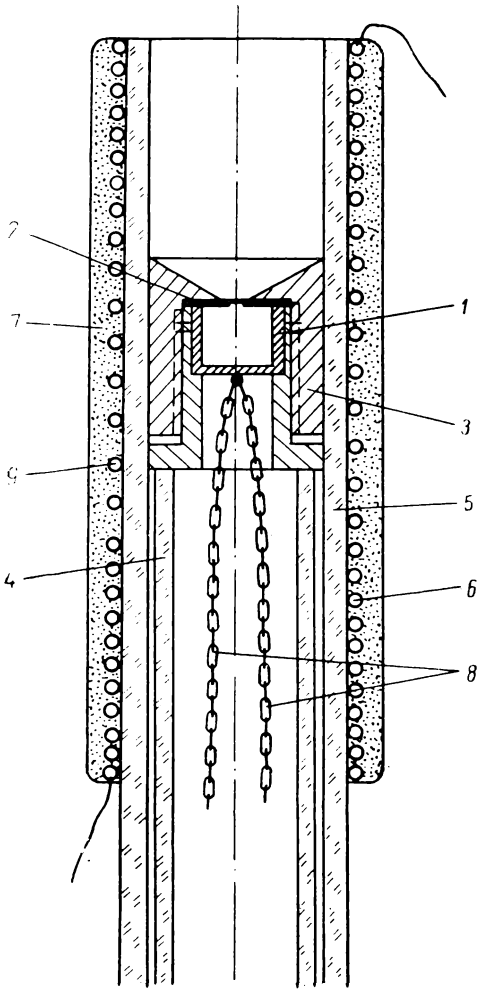

Рис. 1. Схема печи с камерой.

1 — молибденовая чашечка, *2* — молибденовая фольга с отверстием, *3* — внешняя камера, *4* — подставка камеры, *5* — корпус печи, *6* и *9* — нагревательная спираль, *7* — алундовая обмазка, *8* — *Pt* — *Pt Rh* термопара.

Сам прибор состоит из основания *1* (рис. *2*) и съемного колпака-приемника *2* на шлифе, который охлаждается проточной водой. Через маленький шлиф внутрь прибора на пицеине вводилась Pt—PtRh термопара *7*, проградуированная по образцовой термопаре. Термопара, пружиня, плотно прижималась ко дну чашечки, обеспечивая хороший тепловой контакт. Прибор откачивался вакуумной системой, состоящей из форвакуумного насоса РВН-20 и высоковакуумного насоса ЦВЛ-100С, до дав-

ления порядка 10^{-5} мм рт. ст., измеряемое ионизационным датчиком ЛМ-2 с помощью вакуумметра ВИ-3. После этого включался нагрев печи. Вначале печь с камерой прогревались до $\sim$ 200°С, затем до $\sim$450°С в течение 1,5 часа. В процессе дегазации было обнаружено, что при температуре порядка 350°С давление в системе резко повышалось примерно на два порядка без видимой причины. Природа этого явления осталась пока невыясненной. Можно лишь предполагать, что при этой температуре происходит диссоциация пленки гидрида *Ca* или двуокиси CaO_2 с выделением газов, что и приводит к временному повышению давления в системе. Связанная с этим процессом потеря веса кальция оказалась стабильной при стандартных условиях нагрева и составляла 0,5 $\div$ 0,6 мг. Эта поправка учитывалась при окончательном определении потери веса чашечки с *Ca* после окончания опыта.

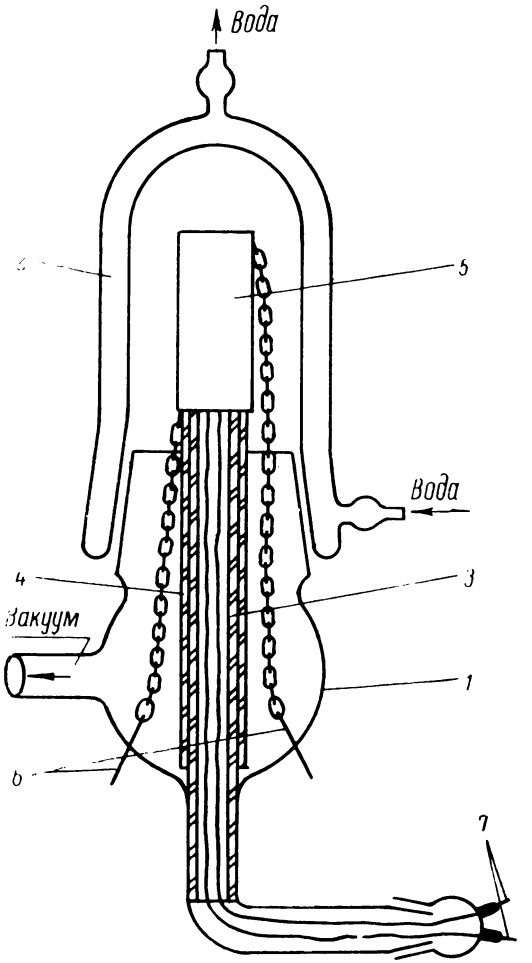

Рис. 2. Схема прибора.

1 — основание, *2* — колпак — приемник с водяной рубашкой, *3* — подставка камеры, *4* — подставка печи, *5* — печь с камерой, *6* — вводы тока, *7* — вводы термопары.

После дегазации температура быстро, в течение 3 $\div$ 5 мин. доводилась до требуемого значения, которое поддерживалось с точностью $\pm$0,5° за счет питания печи стабилизированным током через магнитный стабилизатор СНЭ-220-0,75. Температура измерялась на потенциометре Р-300 с применением нормального элемента 3 кл. и зеркального гальванометра М25/3 с

точностью ±0,1°. Время эффузии составляло от одного до четырех часов. Количество проэффундировавшего *Ca* определялось по потере веса чашечки с веществом путем ее взвешивания до и после опыта на аналитических весах АДВ-200. В полученное значение вносилась поправка на потерю веса камеры с *Ca* до начала экспозиции, определяемая опытным путем. Конец эффузии фиксировался напуском в прибор спектрально-чистого аргона под давлением несколько мм рт. ст. Точность определения массы составляла 8÷10%, а общая ошибка при вычислении давления пара не превышала 15%.

Результаты и обсуждение полученных данных

Было измерено давление пара твердого кальция в 14 различных точках в области температур 520—670°С. Данные хорошо улеглись на прямую в координатах $\left(\lg p, \frac{1}{T}\right)$ (рис. 3). Методом наименьших квадратов было найдено уравнение этой прямой:

$$\lg p\,(\text{мм рт. ст.}) = 7{,}76 - \frac{8501}{T}.$$

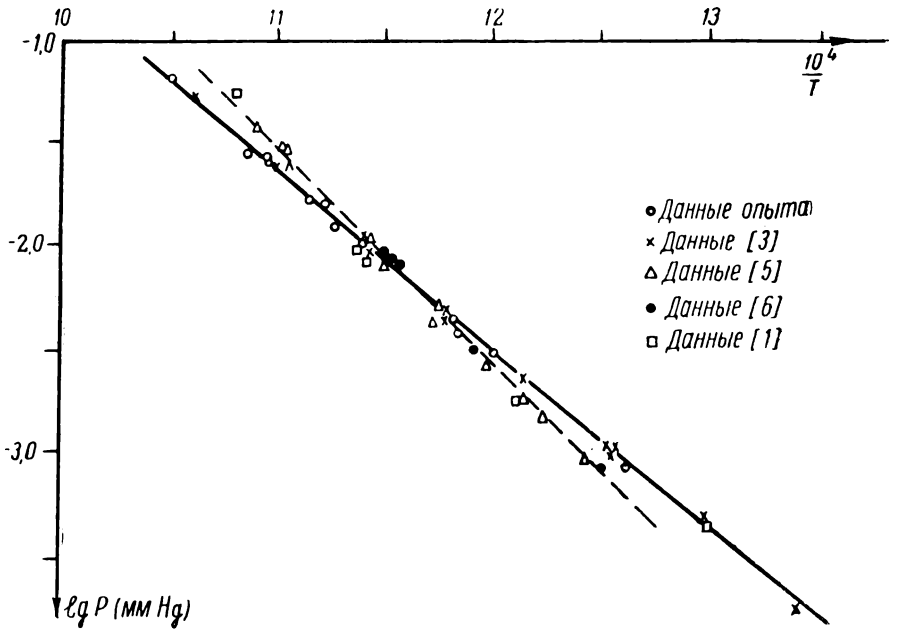

Рис. 3. Зависимость давления насыщенного пара твердого кальция от температуры.

——— — по данным опыта и работы [3]. — — — — по данным [1,5 – 6].

Вычисленная по экспериментальным данным давления пара теплота сублимации *Ca* при 0°C $L_0 = (42{,}17 \pm 0{,}12)\ \frac{\text{ккал}}{\text{г-ат}}$. Как видно из рис. 3, где представлены данные и других авторов, полученные результаты очень хорошо согласуются с данными Приселкова и Несмеянова [3].

Более крутой наклон прямой температурной зависимости давления для твердого кальция, полученный другими авторами, по-видимому, следует объяснить либо влиянием взаимодействия *Ca* с материалом камеры [4—6], либо использованием недостаточно чистого кальция. Надежность полученных данных, так же, как и результатов работы [3], подтверждается и тем, что экстраполяция прямой $\left(\lg p, \frac{1}{T}\right)$ для твердого *Ca* к точке плавления хорошо согласуется с подобной экстраполяцией для жидкого *Ca* [10], чего нет у других авторов.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. N. B. Pilling, **Phys. Rev. .18**, 362, 1921.
[2]. E. Rutberg, **Phys. Rev.**, **46**, 763, 1934.
[3]. Ю. А. Приселков, Ан. Н. Несмеянов. **ДАН СССР, 95,** 1207, 1954.
[4]. W. Roth, U. Wolf, O. Tritz, **Z. Elektrochem., 46,** 42, 1940.
[5]. P. E. Douglas, **Proc. Phys.** Soc., **67**, 783, 1954.
[6]. D. H. Tomlin, **Proc. Phys. Soc., 67,** 787, 1954.
[7]. В. А. Пазухин, А. Я. Фишер. **Вакуум в металлургии**, 1956.
[8]. Ан. Н. Несмеянов. **Давление пара химических элементов. АН СССР**. Москва, 1961 г.
[9]. Хансен, Андерко. **«Структуры двойных сплавов»**. т. 1, 2, 1962.
[10]. H. Hartman, R. Schneider, Zs. f. **anorg. Chem., 180,** 275, 1929.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОГРАММОВЫХ КОЛИЧЕСТВ КАЛЬЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

При работе с молекулярными или атомными пучками часто бывает нужно знать количество сконденсировавшегося на приемнике вещества. Такие задачи возникают при расчете давления пара или скорости испарения вещества, при определении сил осцилляторов спектральных линий по методу поглощения света атомными пучками. Для этих целей можно использовать разные методы: радиоактивный, спектральный, химический, пьезоэлектрический и другие способы [1—3]. Наиболее универсальный и чувствительный метод радиоактивный, за ним идет спектральный. Однако радиоактивный метод требует наличия «горячей» лаборатории. А главное, как это выяснилось в последнее время [4], при большой удельной активности образца искажается истинная картина эффузии за счет вторичных эффектов, что накладывает ограничение на повышение чувствительности метода. От этих недостатков свободен спектральный метод, в то же время не уступающий по чувствительности для большинства веществ радиоактивному.

В связи с вышеизложенным есть необходимость всесторонне исследовать возможности спектрального метода для определения микроколичеств вещества. В настоящей работе такая задача выполнена для кальция.

Выбор условий возбуждения спектра

Специфика поставленной задачи состоит в том, что для анализа имеется ограниченное количество определяемого вещества порядка 10^{-6}—10^{-7} г. Поэтому нужно было: 1) выяснить оптимальные условия ввода пробы в источник света,

2) выбрать наиболее подходящий источник возбуждения спектра.

Были опробованы два метода ввода пробы в источник: метод фульгуратора и метод упаривания на электроде. Как показали исследования, метод упаривания по чувствительности при равных условиях примерно в два раза превосходит метод фульгуратора. Поэтому методика анализа была разработана для метода упаривания на электроде. В качестве источника возбуждения спектра были испытаны дуга переменного тока и высоковольтная искра. Полученные спектрограммы показали, что в дуговом разряде на наиболее чувствительные линии кальция U_1 (4226,7 А°), V_1 (3933,7 А°) и V_2(3968,5 А°) накладывается сильный молекулярный фон полос циана, который мешает проведению анализа. В искровом разряде эти полосы почти полностью исчезают. Из трех полос остается лишь одна, сильно ослабленная полоса с кантом 3883,4 А°. Введение в искровой разряд атомов бария в достаточной концентрации делает последний более стабильным и повышает чувствительность анализа.

Методика анализа

В работе был использован кварцевой спектрограф ИСП-28 с трехлинзовой системой освещения. Ширина щели выбиралась равной 0,01 мм. Электродами служили спектральночистые угли. Подставной электрод затачивался на усеченный конус, а нижний электрод — на торец.

Основной эталонный раствор приготовлялся растворением точной навески металлического кальция с чистотой порядка 99,8% в заданном объеме дистиллированной воды. Остальные эталоны получались разбавлением основного. Всего было использовано для построения градуировочного графика 6 эталонных растворов, данные для которых приведены в табл. 1. В качестве внутреннего стандарта в растворы вводились стронций и барий в количестве 0,05 мг/см³ и 1 мг/см³ соответственно.

Таблица 1

№	Концентрация в μ г/см³				
	Ca	$Sr(NO_3)_2$	Sr	$Ba(NO_3)_2$	Ba
1	40	122	50	1900	1000
2	20	122	50	1900	1000
3	10	122	50	1900	1000
4	7	122	50	1900	1000
5	4	122	50	1900	1000
6	2	122	50	1900	1000

Спектральные угли, соли стронция и бария, дистиллированная вода предварительно проверялись на отсутствие заметных следов кальция.

С помощью микропипетки с ценой деления 0,001 см³ эталонный раствор в количестве 0,1 см³ упаривался по каплям на торце угольного электрода. Опыты проводились как с электродами, на которые предварительно была нанесена полистироловая пленка, так и без нее. Большая чувствительность анализа получилась без пленки.

Спектры фотографировались на спектральные пластинки типа III чувствительностью 5,5 ед. ГОСТ. Время экспозиции — 1 мин. Расстояние между электродами 2 мм, а высота промежуточной диафрагмы 1,2 мм. Режим работы искрового генератора ИГ-2 был выбран следующий: сложная схема, $L=0{,}01$ мгн, $C=0{,}01$ мкф, сила тока 1,4 *а*. Каждый эталон снимался трижды. Обработка спектрограммы производилась на микрофотометре МФ-2. В качестве гомологической пары выбирались следующие линии: 1) *Ca*II 3933,7А°—*Sr* II 4077,7А° и 2) *Ca*II 3933,7А°—*Ba*II 3891,8А°. Обе пары оказались примерно равноценными. На рис. 1 приведен пример градуировочного графика. $\triangle S$ бралось

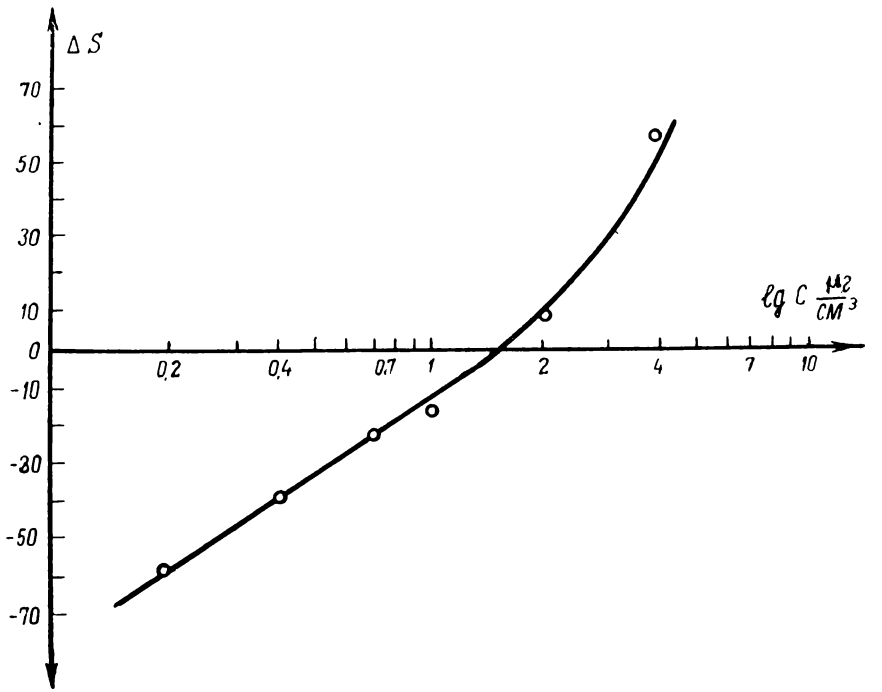

Рис. 1.

как среднее из трех спектров одного и того же эталона. Разброс ΔS не превышал ± 2, что соответствует ошибке в определении концентрации $\pm 5\%$.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. P. E. Douglas. **Proc. Phys Soc., 67,** 783, 1954.
[2]. А. И. Одинцов, **Опт. и спектр.,** 3, 322, 1963.
[3]. Д. Н. Tomlin, **Proc. Phys. Soc., 67,** 787, 1954.
[4]. В. И. Спицин, И. Е. Зимаков. **Докл. АН СССР, 139,** № 3, 654, 1961.

ИЗМЕРЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НАСЫЩЕННОГО ПАРА ТВЕРДОГО КАЛЬЦИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА КОНДЕНСАТА

В литературе нет экспериментальных данных по давлению насыщенного пара твердого кальция ниже 748°К. Наиболее достоверные результаты, полученные методом Кнудсена в работах [1—3], относятся к области температур 748÷943°К. Они не охватывают точку аллотропического превращения твердого кальция, которая, согласно работе [4], равна (737±4)°К.

В данной работе приводятся результаты измерений давления пара твердого кальция в области 641÷837°К, выполненные по методу Кнудсена с использованием спектрального анализа для определения количества сконденсировавшегося на приемнике вещества. Для опытов брался металлический кальций, дважды очищенный перегонкой в вакууме. По данным спектрального анализа чистота кальция была порядка 99,8%. Главной примесью был $Mg \sim (0{,}1\%)$. Мелко нарезанные кусочки Ca очищались с поверхности от окисной пленки и помещались в молибденовый стаканчик, который закрывался крышкой с калиброванным отверстием, сделанной из молибденовой или танталовой фольги. Камера с кальцием быстро помещалась в стеклянный прибор, который откачивался до давления порядка 10^{-5} мм рт. ст. Затем камера нагревалась внутренней печью сопротивления, питаемая стабилизированным напряжением, до заданной температуры и выдерживалась при ней в течение часа для достижения насыщения паров кальция внутри камеры. Время экспозиции фиксировалось затвором, и в зависимости от температуры образца колебалось от 15 минут до 9 часов. Температура измерялась платино-платинородиевой термопарой на потенциометре Р-300 с точностью ±0,5°. Колебания температуры в процессе экспозиции не превышали ±1°.

Конденсат собирался на стеклянном колпаке, который охлаждался проточной водой. С приемника кальций смывался дистиллированной водой. Полученный раствор упаривался на спектрально-чистых угольных электродах, и осадок по стандартной методике подвергался эмиссионному спектральному анализу. Использованные в работе угли и вода не содержали вначале по данным спектрального анализа кальция. Точность единичного определения количества сконденсировавшегося кальция спектральным методом была не хуже $\pm 5\%$. Чувствительность метода порядка 0,1 γг.

Расчет давления насыщенного пара кальция проводился по известной формуле [6]:

$$P\,(\text{мм рт. ст.}) = \frac{17{,}14\ m}{KK_1S\tau}\sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

где m — количество сконденсировавшегося кальция на приемнике в г;

K — коэффициент Клаузинга [5], учитывающий влияние конечных размеров отверстия;

K_1 — коэффициент, учитывающий влияние трубы нагревательной печи на скорость эффузии, который рассчитывался в предположении справедливости закона косинуса для атомного пучка;

τ — время экспозиции в сек;

$\mu = 40{,}08$;

T — температура в °К.

S — площадь калиброванного отверстия, которая бралась равной $1{,}32 \cdot 10^{-3}$; $1{,}45 \cdot 10^{-3}$ и $1{,}73 \cdot 10^{-3}$ см^2.

Учитывая, что общая площадь испарения кальция была равна 0,36 см^2 и принимая также, как и в работах [1—3], что коэффициент конденсации для кальция равен единице, можно считать, что измеренное давление пара близко к равновесному. Результаты измерений для 9 различных температур в области 643÷837°К приведены на рис. 1. Полученные данные хорошо улеглись на прямую $\left(\lg p,\ \frac{1}{T}\right)$. Методом наименьших квадратов было найдено уравнение этой прямой

$$\lg p\,(\text{мм рт. ст.}) = 8{,}29 - \frac{8994}{T}.$$

Полученные результаты хорошо согласуются с данными Приселкова и Несмеянова [1], существенно отличаясь от данных Томлина и Дугласа [2, 3], если их экстраполировать в область более низких температур.

По формуле $\Delta H_0 = (\Delta\varphi^* - R \ln p)$ была рассчитана средняя теплота сублимации кальция при 0^0K. Данные для $\Delta\varphi^*$ брались из справочника [7]. Оказалось, что

$$\Delta H_0 = (42{,}3 \pm 0{,}2)\ \text{ккал/г-ат.}$$

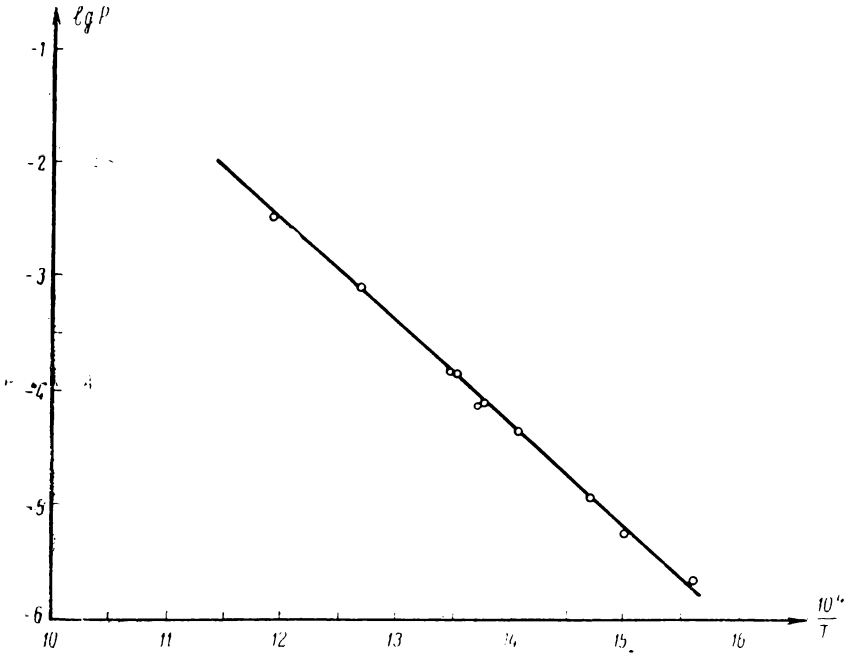

Рис. 1. Зависимость давления насыщенного пара твердого кальция от температуры.

Полученное значение на 0,3 ккал/г-ат превышает принятую величину [7]. Однако, если учесть теплоту аллотропического превращения $\triangle H_{tr}=0{,}27$ ккал/г-ат, то можно понять полученное завышенное значение для $\triangle H_0$.

ВЫВОДЫ

1. Впервые измерено давление насыщенного пара твердого кальция в области 641÷748°К. Полученные данные достаточно хорошо согласуются с результатами работы [1].

2. Измерение давления пара методом Кнудсена с использованием спектрального анализа конденсата для кальция конкурирует с радиоактивным методом.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Ю. А. Приселков, Ан. Н. Несмеянов. Докл. АН СССР, 95, 207, 1954.

[2]. D. H. Tomlin, Proc. Phys Soc., 67, 787, 1954.

[3]. P. E. Douglas, **Proc. Phys. Soc., 67,** 783, 1954.
[4]. J. F. Smith, J. Electrochem. **Soc., 103,** № 7, 409, 1956.
[5]. С. Дэшман. **Научные основы вакуумной техники,** ИЛ, М., **1950.**
[6]. Ан. Н. Несмеянов. **«Давление пара химических элементов»,** АН, СССР, М., 1961.
[7]. **Термодинамические свойства индивидуальных веществ,** АН СССР, М., 1962.

ИЗМЕРЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НАСЫЩЕННОГО ПАРА КАЛЬЦИЯ НАД СПЛАВАМИ Al—Ca В ОБЛАСТИ ИНТЕРМЕТАЛЛИЧЕСКОГО СОЕДИНЕНИЯ Al_2Ca

В работе [1] было показано, что в области интерметаллического соединения Al_2Ca упругость паров кальция испытывает резкий скачок при переходе от Al_2Ca, насыщенного кальцием, к Al_2Ca, насыщенному алюминием. Использованный в этой работе весовой вариант метода Кнудсена не позволил измерить давление насыщенного пара кальция вблизи соединения Al_2Ca при $N_{Ca}<0{,}333$ ат и температурах ниже 700°С, когда второе интерметаллическое соединение Al_4Ca еще сохраняет свою устойчивость. В настоящей работе приводятся результаты измерений давления насыщенного пара кальция над тремя сплавами Al—Ca вблизи соединения Al_2Ca. Для повышения чувствительности эффузионного метода было использовано спектральное определение количества сконденсировавшегося на приемнике кальция. [2].

Опыты проводились на установке, описанной в работе [3]. Сплавы готовились в алундовых тиглях из электролитического алюминия и очищенного перегонкой в вакууме кальция. Плавка велась в вакуумной индукционной печи в атмосфере очищенного аргона при давлении 400—500 мм рт. ст. Состав сплавов определялся по шихтовке. Взвешивание шихты и полученного из нее сплава показало, что в процессе плавки выгорания кальция практически не происходило благодаря значительному давлению аргона и малому времени плавки (1—2 мин.). Было приготовлено три сплава *Al*-Ca вблизи интерметаллического соединения Al_2Ca следующего состава: 41%, 43% и 50% (вес) кальция. Сплавы перед опытом измельчались в агатовой ступке и помещались в молибденовые стаканчики с молибденовой диафрагмой. Далее работа проводилась по методике, описанной в работе [4].

Результаты и их обсуждение

На рис. 1 приведены полученные данные по давлению насыщенного пара кальция над изученными сплавами в зависимости от температуры. Для сплава 41% (вес.) кальция удалось

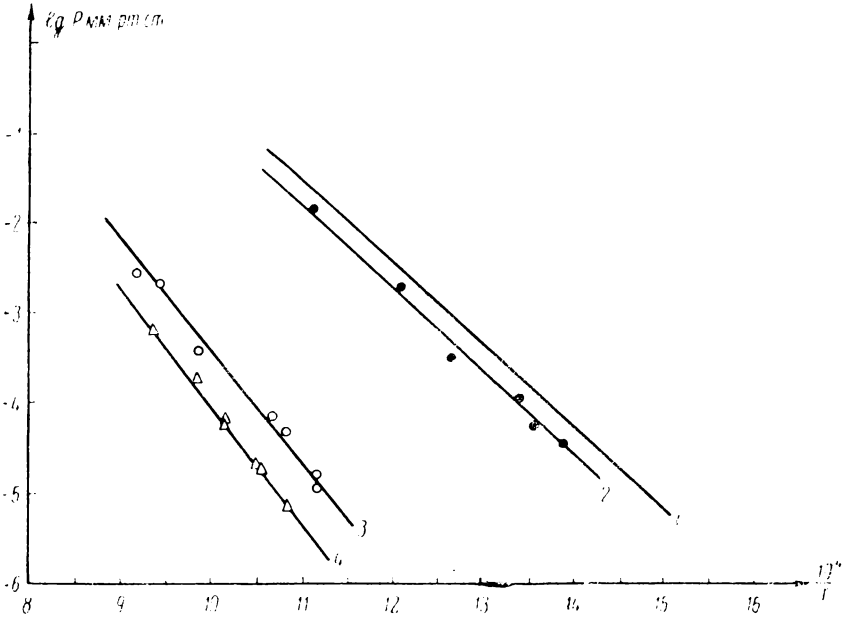

Рис. 1. Зависимость давления насыщенного пара кальция от температуры и состава Al—Ca сплавов.

1— над чистым кальцием; *2* — над сплавом 50% (вес.) кальция; *3*— над сплавом 43% (вес.) кальция; *4*— над сплавом 41% (вес.) кальция.

измерить давление пара в области 700—650°С, где Al_2Ca находится в равновесии не с расплавом, а с твердым Al_4Ca. Отсутствие излома прямой для этого сплава при перитектической температуре, по-видимому, указывает на то, что кристаллы Al_4Ca сохраняют свою устойчивость и в жидкой фазе вплоть до 850°С. Переход к сплаву 43% (вес.) кальция приводит к монотонному возрастанию давления пара кальция примерно на половину порядка. Этот факт указывает на существование у соединения Al_2Ca определенной области гомогенности, внутри которой давление пара является функцией не только температуры, но и состава сплавов. К этому же результату один из авторов пришел ранее [5], показав металлографическим методом, что сплавы Al-Ca в области составов 41%—43% (вес.) кальция практически гомогенны.

Над сплавом 50% (вес.) кальция давление пара последнего практически совпадает с давлением над чистым металлом как в жидкой, так и в твердой фазе.

Зависимость давления паров кальция над исследованными сплавами описывается следующими уравнениями:

$$\lg P_{Ca(41\%\ Ca)}\ (\text{мм рт. ст.}) = 9{,}65 - \frac{13655}{T} \qquad (1)$$

$$\lg P_{Ca(43\%\ Ca)}\ (\text{мм рт. ст.}) = 8{,}33 - \frac{11880}{T} \qquad (2)$$

$$\lg P_{Ca(50\%\ Ca)}\ (\text{мм рт. ст.}) = 8{,}18 - \frac{9086}{T} \qquad (3)$$

Вычисленная из (1) и (2) теплота сублимации кальция для сплавов 41% и 43% (вес.) в области 830—630°С составляет в среднем около 58,5 *ккал/г.* — ат., что близко совпадает с результатом работы [1] для сплава 33,4% (вес.) кальция. Для сплава 50% (вес.) теплота сублимации кальция та же, что и у чистого металла.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. П. В. Кочеров, П. В. Гельд. **Изв. высш. уч. зав.; черн. металл.**, № 2, 5, 1960.

[2]. В. Г. Мурадов. **Уч. записки Ульяновского пединститута, 18, вып. 5,** 1964.

[3]. В. Г. Мурадов. **Уч. записки Ульяновского пединститута, 18, вып. 5,** 1964.

[4]. В. Г. Мурадов. **Уч. записки Ульяновского пединститута, 18, вып. 5,** 1964.

[5]. П. В. Кочеров. **Канд. диссертация,** г. Свердловск, 1959.

НЕКОТОРЫЕ ЭФФЕКТЫ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ НАЛИЧИЕМ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО КОНТАКТА С РЕАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ СЕРНИСТОГО КАДМИЯ

Для исследования фотопроводимости твердых тел обычно приходится обеспечивать электрический контакт с помощью электродов. Выбор материала электродов, обеспечивающих с другим веществом идеальный контакт, не создающего никакого дополнительного сопротивления для тока, не реагирующего химически с исследуемым веществом, не меняющего своих свойств при изменении условий освещения, температуры или величины приложенного электрического поля, все еще во многом остается неопределенным и требует большого искусства.

Исследованию свойств контактов, образованных кристаллами сернистого кадмия с электродами посвящено ряд работ [1—13] советских и зарубежных физиков. При исследовании свойств контактов с *CdS* обычно снимались вольт-амперные характеристики на постоянном и переменном токах, распределение потенциала вдоль кристалла, величина шумов, зависимость фототока от интенсивности освещения, изучались свойства контактов при равномерном освещении и применении светового зонда. В работах [3—5] по исследованию электрических контактов с кристаллами *CdS* затрагивалась проблема потенциальных барьеров вблизи электродов. Обобщение представлений роли поверхностных состояний в образовании контактных барьеров в случае кристалла *CdS* и об особых свойствах индия и галлия, используемых для приготовления контактов, было сделано Крегером и др. [12].

Поверхностные уровни Тамма, локальные состояния электронов и дырок, вызываемые адсорбцией атомов примесей на поверхности полупроводника, особенно сильно может сказаться

на свойствах прижимных контактов металл-полупроводник. Часто влияние поверхностных состояний оказывается настолько велико, что вблизи поверхности образуется «инверсионный» слой с проводимостью противоположного типа по сравнению с объемной проводимостью полупроводника.

Для изучения некоторых эффектов, обусловленных наличием электродов с кристаллами сернистого кадмия нами были поставлены следующие опыты. Для исследования мы брали монокристаллы *CdS* с темновым сопротивлением порядка 10^{13} ом. Образец помещался на подставку из изоляционного материала (оргстекло) и изолировался от постороннего воздействия света. Электродами и зондами служили шесть медных проволочек диаметром 0,07—0,08 мм или же в месте контакта с кристаллами они покрывались (лужением) тонким слоем индия или галлия. Электроды и зонды накладывались на поверхность кристалла и натягивались с помощью мягких пружин. Измерение потенциалов электродов и зондов производилось компенсационным методом с использованием квадрантного электрометра. Измерительный зонд обычно располагался вне токового электрода. Ток измерялся потенциометром ППТВ-1. Напряжение на образец и потенциометр подавалось от стабилизированного источника постоянного тока. В качестве источника освещения использовалась лампа накаливания 30 вт 12 в, питаемая от батареи аккумулятора. Интенсивность освещения изменялась с помощью набора нейтральных светофильтров НС-6-12. Релаксационные процессы наблюдались на осциллографе ЭО-7. Контакты зондов и электродов предварительно проверялись на омичность. В большинстве случаев контакты были неомические, со слабыми выпрямительными свойствами. Для большинства кристаллов и различных электродов при равномерном освещении прианодный скачок потенциала обычно был больше прикатодного, причем с увеличением освещенности прикатодный скачок потенциала обычно увеличивается, а прианодный уменьшается. Для некоторых образцов и электродов прикатодный скачок потенциала был больше, чем прианодный. Величина фототока при освещении как катода, так и анода во много раз больше темнового тока. Для кристаллов и электродов с большим прианодным скачком потенциала освещение положительного электрода дает большее увеличение тока, чем освещение отрицательного. Для кристаллов и электродов с большим прикатодным скачком потенциала освещение отрицательного электрода дает большее увеличение тока, чем освещение положительного.

В процессе изучения зависимости скачка потенциала на электродах от освещенности и приложенного напряжения мы наблюдали, что в определенных для каждого образца и электродов интервалах постоянного приложенного напряжения

(50—300 в) и освещенности фототок оказывался модулированным периодическими колебаниями. Эти колебания возникают как при освещении образца прямоугольными импульсами, так и при стационарном равномерном освещении всего образца. Иногда колебания через некоторое время исчезают, но после короткого затемнения вновь возникают. Слабые увлажнения образца срывают колебания или уменьшают амплитуду колебания. По виду колебания имеют сходство с релаксационными, а иногда приближаются к синусоидальным. Амплитуда колебаний составляла от нескольких процентов до нескольких десятков процентов общего фототока.

Наблюдаемые скачки потенциала у электродов объясняются, видимо, в основном наличием поверхностных потенциальных барьеров у электродов, так как скачки потенциала мало зависят от материала электрода, повышенным приэлектродным сопротивлением, обусловленным неоднородной структурой контакта. Слабые выпрямляющие свойства объясняются разницей потенциальных барьеров, например, определяемых разницей в концентрациях адсорбированного кислорода возле разных электродов. Адсорбированный кислород имеет большое электронное сродство.

Протекание значительного по сравнению с темновым стационарного фототока при освещении электродов может быть объяснено наличием на контакте металл-полупроводник двойного слоя (электроны на металле, дырки на полупроводнике). При зарядке такого слоя электроны располагаются в приповерхностном слое металла, а дырки либо на поверхностных уровнях, либо в тонком приповерхностном слое [1]. Шейнкман и др. [14] наблюдали образование такого двойного слоя возле катода за счет дрейфа дырок к катоду.

Наблюдаемый на опыте большой скачок потенциала возле анода можно объяснить наличием большой концентрации инжектированных дырок возле анода. Это приводит к тому, что возле анода создается область с пониженной концентрацией носителей, малой по сравнению с концентрацией возле катода.

Если электроны не могут поступать из катода, то при освещении отрицательного электрода в образце течет небольшой электронный ток, ограниченный пространственным зарядом. Этот ток будет еще меньше, когда освещается положительный электрод, так как эффективная подвижность дырок для *CdS* гораздо меньше подвижности электронов. Если электроны могут поступать из катода, то ограниченный пространственным зарядом ток в случае, когда освещается отрицательный электрод меньше, чем ток, текущий при освещении положительного электрода. Когда освещается положительный электрод, возбужденные светом дырки могут под действием поля диффундировать в неосвещенную область и там захватываться ловушка-

ми, образуя положительный пространственный заряд. Электроны будут входить из катода в кристалл до тех пор, пока будет происходить рекомбинация между свободными электронами и захваченными дырками. Поэтому для одного и того же вещества CdS с тем же самым типом основных носителей направление поля, при котором ток максимален, различно, в зависимости от того, возможно или нет поступление электронов из катода и дырок из анода.

Увеличение скачков потенциала на катоде с увеличением

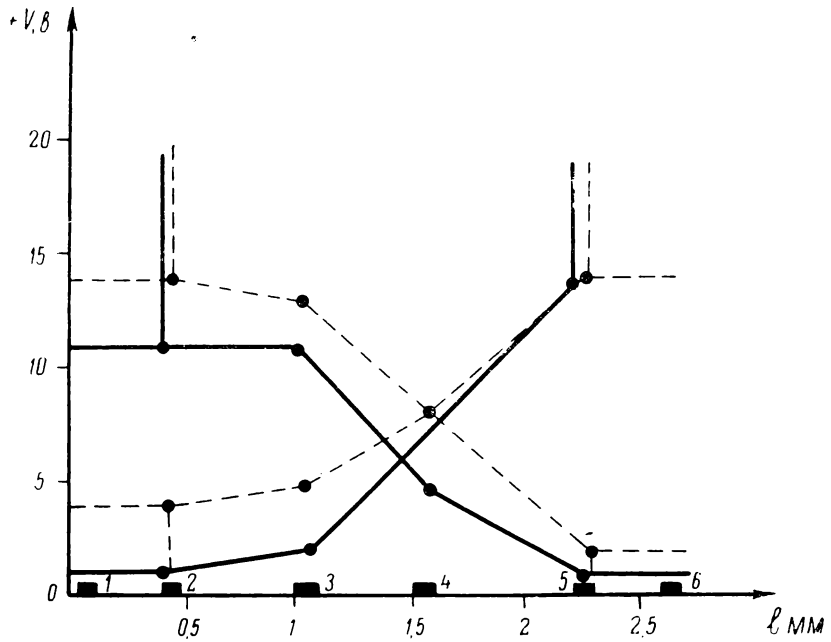

Рис. 1. Распределение потенциала вдоль образца *CdS* с *Jn* электродами при освещении:

— — — — ослабленным в 10 раз
——— ослабленным в 100 раз
2,5 — токовые электроды.
1,3, 4,6 — измерительные зонды.

освещенности (рис. 1) объясняется увеличением положительного объемного заряда у катода. Уменьшение скачка потенциала у анода с увеличением освещенности объясняется повышением концентрации основных носителей у анода. Отклонение от указанной зависимости объясняется преобладанием поступления электронов из катода или дырок из анода. Инжекцию дырок с анода можно представить следующим образом. Положительный потенциал на электроде благоприятствует прохождению элек-

трона с поверхностного уровня к металлу. Восстановление этих электронов на поверхностных уровнях происходит путем переходов электронов валентная зона — поверхностные уровни.

Колебания фототока в *CdS* монокристаллических фотосопротивлениях наблюдали авторы работы (15), описываемые явления ими связываются с процессами, происходящими на контакте металл — полупроводник, однако ими не даются объяснения причине возникновения колебаний.

Качественно явление возникновения колебаний может быть объяснено следующим образом. Несмотря на то, что высота поверхностного потенциального барьера не зависит от разности работ выхода металла и полупроводника, потенциал поверхности полупроводника следует за изменением потенциала, приложенного к металлу, так как одновременно в фотопроводник *CdS* инжектируются электроны через отрицательный контакт и дырки через положительный, при этом поверхностные уровни играют роль посредника при обмене электронами между металлом и полупроводником. При некотором напряжении $U_к$, разном для различных поверхностных потенциальных барьеров и освещенности (концентрации носителей), все поверхностные примесные центры можно считать ионизованными вследствие инжекции электронов с катода и дырок с анода. При этом не может установиться стационарное состояние с установившимся током, так как после ионизации поверхностных примесных центров поверхностный потенциальный барьер исчезает (ток увеличивается). В результате этого поле в приповерхностной области падает до величины $E \ll E_к$, и поверхностные примесные центры, возвращаясь к равновесному состоянию, вновь захватывают основные носители и восстанавливают потенциальный барьер (ток уменьшается). Таким образом, фототок периодически изменяется со временем.

Объяснение вышеуказанных эффектов, наблюдаемых на опыте и обусловленных наличием металлического контакта с реальной поверхностью кристалла *CdS*, согласуются с теоретическими работами [16, 17] и экспериментальной работой [18].

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Muscheid W. Ann. Phys. 13, 305 (1953).
[2]. Fassbender I. L. Physik, 145, 301, (1956).
[3]. Smith R. W. RCA, Rev., 12, 350, (1951).
[4]. Buttler W. M., Muscheid W., Ann. d. Phys, 14,215 (1954) 15,82 (1954).
[5]. Broser J. Warminsky R. Ls. Naturforsch., 5a, 62, (1950).
[6]. Buttler M. Wiss. L. Humbold — Universität zu Berlin 3, 6, 449 (1953/54)
[7]. Гоминская, Федорус, Шейнкман. Укр. физ. ж. 9, 5, 593 (1954).
[8]. Böer K. W. Lubit L. K. L. Naturforsch 15a, 1,91 (1961).

[9]. Klier E. Ann. Physik 18,3—4,163 (1956).
[10]. Creiner R. A. и др. I. Appl. Phys. 28, 11, 1358 (1957).
[11]. Шейнкман М. К. Диссертация, Киев, 1959.
[12]. Kröger, Diemer, Klasens, Phys. Rev, 103, 279. (1956).
[13]. Умаров С. У., Гурвич Л. Г. ДАН Уз. ССР, 7 (1955).
[14]. В. Е. Лашкарев, Д. П. Лазарев, М. К. Шейнкман. **Фотоэлектрические и оптические явления в полупроводниках**. АН УССР. Киев, 1959, стр. 20.
[15]. Е. А. Сальков, Г. А. Федорус. **Фотоэлектрические и оптические явления в полупроводниках.** АН СССР. Киев, 1959.
[16]. Lampert Murray, I. Phys and Chem Solids, 22, 189. (1961).
[17]. Lampert Murray, Phys. Rev, 125, № 1, 126 (1962).
[18]. Ст. Кынев, Р. Пиренчиева и Кр. Маринова. ФТТ, 5. (1963).

СОДЕРЖАНИЕ

Баширова-Бикматова Г. Г. Расслояемые пары комплексов . . . 3
Яковлев Л. Г., Файнгольд М. И., Баширов Э. М., Особенности рассеяния на потенциалах вид $\pm \alpha r^{-\kappa}$ 28
Яковлев Л. Г., Баширов Э. М. О решении обратной задачи классического рассеяния 34
Яковлев Л. Г., Гирин И. А., Халикова Д. Х. Некоторые новые кинематические соотношения для рассеяния 39
Гирин И. А. Феноменологический расчет рассеяния атомов . . . 42
Файнгольд М. И. Изоморфизм потенциалов и поверхностей . . . 46
Файнгольд М. И. К задаче Эйнштейна-Смолуховского 53
Халикова Д. Х. Использование общей теории ядерных реакций для расчетов столкновений атомов 59
Халикова Д. Х. Применение методов оптической модели ядра к расчету соударений атомов 62
Мурадов В. Г. Определение давления насыщенного пара твердого кальция весовым методом 64
Мурадов В. Г. Определение микрограммовых количеств кальция спектральным методом 70
Мурадов В. Г. Измерение давления насыщенного пара твердого кальция с применением спектрального анализа конденсата . . . 74
Мурадов В. Г., Кочеров П. В. Измерение давления насыщенного пара кальция над сплавами Al—Ca в области интерметаллического соединения Al_2Ca 78
Лысов В. Ф. Некоторые эффекты, обусловленные наличием металлического контакта с реальной поверхностью сернистого кадмия 81

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

Том XVIII. Выпуск 5

Редактор *Г. Г. Баширова*
Технический редактор *Н. Ф. Спиридонов*
Корректор *В. М. Дурасова*

Сдано в набор 2/VIII 1964 г. Подписано к печати 30/XII 1964 г. ЗМ00114. Тираж 550 экз. Формат 60×90¹/₁₆. Физических печ. л. 5,5. Уч.-изд. л. 5,0. Цена 35 коп.

Ульяновский Государственный педагогический институт имени И. Н. Ульянова, г. Ульяновск, Ульянова, 2.

9-я типография имени Мяги управления по печати Куйбышевского облисполкома, г. Куйбышев, ул. Венцека, 60. Заказ № 2604.

Цена 35 коп.